Série 7 - corrigé
Photons, comptage de photons
2 avril 2012

Exercice 1 – Effet Compton : diffusion de rayons X sur des électrons au repos.

a) Energie d'un photon : E=hν
Quantité de mouvement d'un photon : p=hν/c

b) Conservation de l'énergie : $h\nu = h\nu' + \frac{P_e^2}{2m_0}$ (1)

Conservation de la quantité de mouvement : $\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + P_e\cos\phi$ (2)

$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - P_e\sin\phi$ (3)

c) On peut réécrire (2) $P_e\cos\phi = \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\cos\theta$ et (3) $P_e\sin\phi = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta$

En élevant au carré ces deux expressions, en additionnant les deux nouvelles expressions obtenues et en utilisant (1), on obtient :

$2m_0h(\nu - \nu') = \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 - 2\nu\nu'\cos\theta + \nu'^2)$, qui peut se réécrire :

$$2m_0h = \frac{h^2}{c^2}\left((\nu - \nu') - \frac{2\nu\nu'}{(\nu - \nu')}(1-\cos\theta)\right)$$

En négligeant δν devant ν, il reste :

$$\nu' - \nu \approx \nu^2 \frac{h}{m_0c^2}(1-\cos\theta)$$

ou encore en utilisant ν=c/λ:

$$\delta\lambda = \lambda - \lambda' \approx \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

d) D'après l'équation de Compton, l'impulsion maximale est transférée lorsque le photon est rétrodiffusé (θ=180°).

Il s'ensuit que la différence de longueur d'onde vaut alors $\delta\lambda_{Max} = \frac{2h}{m_0c}$

L'énergie transférée correspondante s'écrit : $\Delta E_{Max} = h\delta\nu_{Max} = h\frac{\delta\lambda_{Max}}{\lambda^2} = \frac{2h^2}{m_0\lambda^2}$

Et finalement la vitesse maximale est $v_{Max} = \frac{2h}{m_0\lambda}$

Exercice 2 – Comptage des photoélectrons pour un champ classique d'intensité constante.

a) Les deux facteurs qui contribuent au caractère probabiliste du signal détecté lors du processus d'émission photoélectrique sont:

1) les fluctuations statistiques intrinsèques du champ détecté. Leurs natures (i.e. les différents moments) varient d'un type de champ stochastique à l'autre.

2) les fluctuations liées à la nature discrète du processus photoélectrique. La nature quantique de l'interaction entre le détecteur et le champ permet seulement d'obtenir des probabilités pour l'émission photoélectrique. Nous sommes incapable de prédire qu'un photoélectron sera émis à un temps t1 ou à un temps t2. Ces fluctuations sont présentent pour un faisceau d'intensité constante et sont parfois appelées fluctuations corpusculaires ("particle fluctuation" en anglais).

b) Par définition les effets statistiques d'un tel champ sont absent. On va donc pouvoir décorreller les facteurs 1) et 2), en ce concentrant d'abords sur le 2).

c) Le nombre moyen de photons entrant dans le détecteur par seconde est $\frac{\bar{I}A}{\hbar\omega}$.

d) Le nombre moyen de photons compté dans le temps T est $\xi\bar{I}T$.

e) c.f. notes de cours chapitre 3 pages 14 à15. $p(n,t,T) = \frac{\left(\xi\bar{I}T\right)^n}{n!}\exp(-\xi\bar{I}T)$. $p(n,t,T)$ est ici indépendant du temps t car un champ d'intensité constante doit produire la même intensité de comptage pour tous les intervalle de même durée quelque soit l'origine des temps.

Exercice 3 – Comptage des photoélectrons pour un champ classique d'intensité quelconque.

a) $p(n,t,T) = \left\langle \frac{\left(\xi\bar{I}T\right)^n}{n!}\exp(-\xi\bar{I}T) \right\rangle = \int_0^\infty \left(\frac{\left(\xi\bar{I}T\right)^n}{n!}\exp(-\xi\bar{I}T) \right) P(\bar{I})d\bar{I}$ avec les crochets qui signifient un moyennage stochastique sur l'ensemble $\bar{I}$. Il faut comprendre que $\bar{I}(t)$ est constante sur chaque intervalle [t,t+T], mais pour différents intervalles [t,t+T] les $\bar{I}(t)$ sont aussi différents, d'où la distribution $P(\bar{I})$.

b) $p(n,t,T) = \left\langle \frac{\left(\xi\int_t^{t+T} dt'\bar{I}(t')T\right)^n}{n!}\exp(-\xi\int_t^{t+T} dt'\bar{I}(t')T) \right\rangle$ cette formule est parfois appelée la formule de Mandel de comptage des photoélectrons.

Pour chaque intervalle d'échantillonnage [t,t+T], l'intégrale $\xi\int_t^{t+T} dt'\bar{I}(t')$ calcule le nombre de photons accumulés sur le détecteur. Si l'intensité fluctue d'une manière stochastique, cette intégrale est une variable aléatoire. Donc il faut utiliser un moyennage d'ensemble donné par la formule de Mandel de comptage des photoélectrons.

c) $p(n,t,T) = \left\langle \frac{\Omega^n}{n!}\exp(-\Omega) \right\rangle$

d) $$n^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1)\left\langle \frac{\Omega^n}{n!}\exp(-\Omega)\right\rangle$$

$$n^{(r)} = (-1)^r \sum_{n=r}^{\infty}\left\langle \frac{\Omega^{n-r}}{(n-r)!}\frac{d^r}{dx^r}\exp(-x\Omega)\right\rangle\Bigg|_{x=1}$$

$$n^{(r)} = (-1)^r \frac{d^r}{dx^r}\sum_{k=0}^{\infty}\left\langle \frac{\Omega^k}{k!}\exp(-x\Omega)\right\rangle\Bigg|_{x=1}$$

$$n^{(r)} = (-1)^r \frac{d^r}{dx^r}\left\langle \exp((1-x)\Omega)\right\rangle\Big|_{x=1}$$

$$n^{(r)} = \frac{d^r}{dy^r}\left\langle \exp(y\Omega)\right\rangle\Big|_{y=0} = \frac{d^r\phi(y)}{dy^r}\Bigg|_{y=0} = \left\langle \Omega^r\right\rangle$$

e) $n^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} np(n,t,T) = \bar{n}$ or à partir de la question précédente $n^{(1)} = \left\langle \Omega^1\right\rangle$

d'où $\bar{n} = \left\langle \xi \int_t^{t+T} dt' \bar{I}(t')\right\rangle$

f) Par définition $\overline{\Delta n^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2$. En fonction des moments factoriels nous avons donc: $\overline{\Delta n^2} = n^{(2)} + \bar{n} - \bar{n}^2$

En utilisant le résultat de la question d) $n^{(2)} = \left\langle \Omega^2\right\rangle$, on obtient:

$$n^{(2)} = \xi^2 \int_t^{t+T} dt' \int_t^{t+T} dt'' \left\langle \bar{I}(t')\bar{I}(t'')\right\rangle$$

il s'ensuit:

$$\overline{\Delta n^2} = \bar{n} + \xi^2 \int_t^{t+T} dt' \int_t^{t+T} dt'' [\left\langle \bar{I}(t')\bar{I}(t'')\right\rangle - \left\langle \bar{I}(t')\right\rangle\left\langle \bar{I}(t'')\right\rangle]$$

Par définition $g^2(t',t'') \equiv \dfrac{\left\langle \bar{I}(t')\bar{I}(t'')\right\rangle}{\left\langle \bar{I}(t')\right\rangle\left\langle \bar{I}(t'')\right\rangle}$

d'où $\overline{\Delta n^2} - \bar{n} = \xi^2 \int_t^{t+T} dt' \int_t^{t+T} dt'' \left\langle \bar{I}(t')\right\rangle\left\langle \bar{I}(t'')\right\rangle [g^2(t',t'') - 1]$

g) Pour une distribution de Poisson on a $\overline{\Delta n^2} = \bar{n}$. La déviation de la variance d'une distribution de Poisson dépend de la fonction de corrélation de second ordre.

A partir du résultat de la question f) on peut montrer que des champs stochastiques classiques ne peuvent qu'élargir la distribution de Poisson obtenue pour une lumière d'intensité constante. Par exemple pour des champs stationnaires classiques on obtient $\overline{\Delta n^2} - \bar{n} = \xi^2 T^2 \left(\left\langle \bar{I}^2\right\rangle - \left\langle \bar{I}\right\rangle^2\right)$ qui est forcément positif.