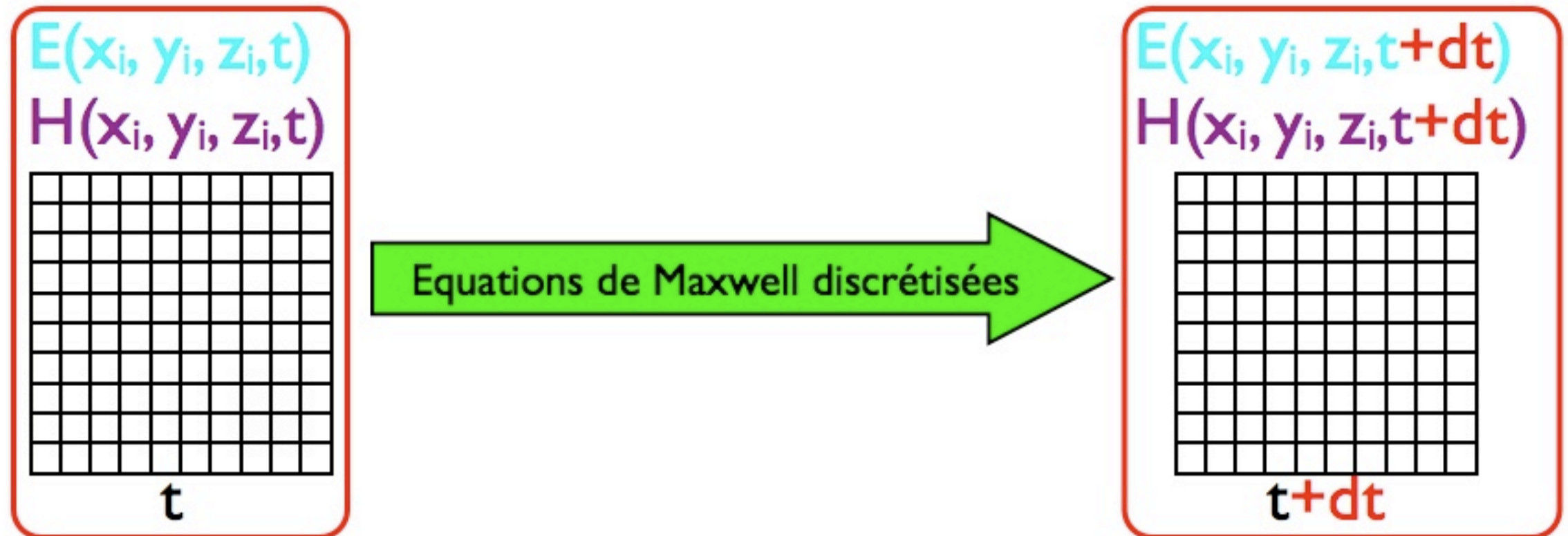


Modélisation

Différences finies dans le domaine temporel

Résolution numérique des équations de Maxwell en fonction du temps, par des méthodes de différences finies sur un maillage



Différences finies dans le domaine temporel

* On obtient directement l'évolution temporelle du champ électromagnétique dans la structure diélectrique et la réponse optique (transmission, réflexion, ...)

* par contre on n'obtient que indirectement une compréhension physique des phénomènes (modes propres, courbes de dispersion, ...)

* il est délicat, mais parfois possible, d'inclure des milieux dispersifs ou non-linéaires



méthodes numériques :

"une avalanche de chiffres dans un désert d'idées"

Différences finies dans le domaine temporel

Plus techniquement :

remplacement des opérations de dérivation par des différences finies

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

écrites de préférence sur une forme centrée :

$$\frac{df}{dx}(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Le but de la méthode FDTD est de bien choisir le maillage et sélectionner les composantes utiles des champs afin de minimiser l'espace mémoire nécessaire et le temps de calcul

Différences finies dans le domaine temporel

Equations de Maxwell :

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

6 équations sous forme scalaire :

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right)$$

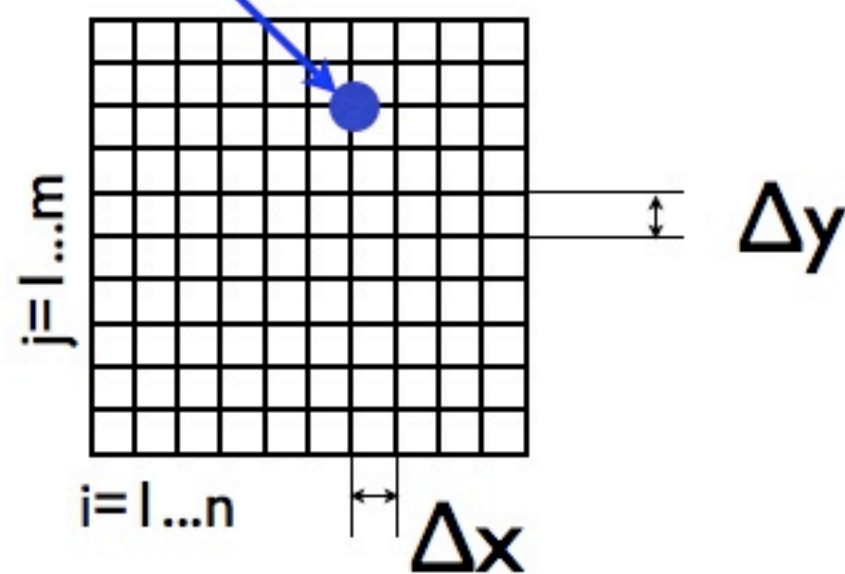
$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right)$$

Différences finies dans le domaine temporel

Maillage : le pas de la grille est $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$$

$$F^n(i, j, k) = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$$



les dérivées / différences finies s'écrivent :

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} = \frac{F^n(i + 1/2, j, k) - F^n(i - 1/2, j, k)}{\delta}$$

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} = \frac{F^{n+1/2}(i, j, k) - F^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t}$$

Différences finies dans le domaine temporel

les 6 équations scalaires se réécrivent :

$E_x^{n+1}(i+1/2,j,k)=A_{i+1/2,j,k}E_x^n(i+1/2,j,k)$ $+B_{i+1/2,j,k}[H_z^{n+1/2}(i+1/2,j+1/2,k)-H_z^{n+1/2}(i+1/2,j-1/2,k)$ $+H_y^{n+1/2}(i+1/2,j,k-1/2)-H_y^{n+1/2}(i+1/2,j,k+1/2)]$	$H_x^{n+1/2}(i,j+1/2,k+1/2)=H_x^{n-1/2}(i,j+1/2,k+1/2)$ $+\frac{\Delta t}{\mu\delta}[E_y^n(i,j+1/2,k+1)-E_y^n(i,j+1/2,k)$ $+E_z^n(i,j,k+1/2)-E_z^n(i,j+1,k+1/2)]$
$E_y^{n+1}(i,j+1/2,k)=A_{i,j+1/2,k}E_y^n(i,j+1/2,k)$ $+B_{i,j+1/2,k}[H_x^{n+1/2}(i,j+1/2,k+1/2)-H_x^{n+1/2}(i,j+1/2,k-1/2)$ $+H_z^{n+1/2}(i-1/2,j+1/2,k)-H_z^{n+1/2}(i+1/2,j+1/2,k)]$	$H_y^{n+1/2}(i+1/2,j,k+1/2)=H_y^{n-1/2}(i+1/2,j,k+1/2)$ $+\frac{\Delta t}{\mu\delta}[E_z^n(i+1,j,k+1/2)-E_z^n(i,j,k+1/2)$ $+E_x^n(i+1/2,j,k)-E_x^n(i+1/2,j,k+1)]$
$E_z^{n+1}(i,j,k+1/2)=A_{i,j,k+1/2}E_z^n(i,j,k+1/2)$ $+B_{i,j,k+1/2}[H_y^{n+1/2}(i+1/2,j,k+1/2)-H_y^{n+1/2}(i-1/2,j,k+1/2)$ $+H_x^{n+1/2}(i,j-1/2,k+1/2)-H_x^{n+1/2}(i,j+1/2,k+1/2)]$	$H_z^{n+1/2}(i+1/2,j+1/2,k)=H_z^{n-1/2}(i+1/2,j+1/2,k)$ $+\frac{\Delta t}{\mu\delta}[E_x^n(i+1/2,j+1,k)-E_x^n(i+1/2,j,k)$ $+E_y^n(i,j+1/2,k)-E_y^n(i+1,j+1/2,k)]$

$$A_{i,j,k} = 1 - \frac{\sigma(i,j,k)}{\varepsilon(i,j,k)}$$

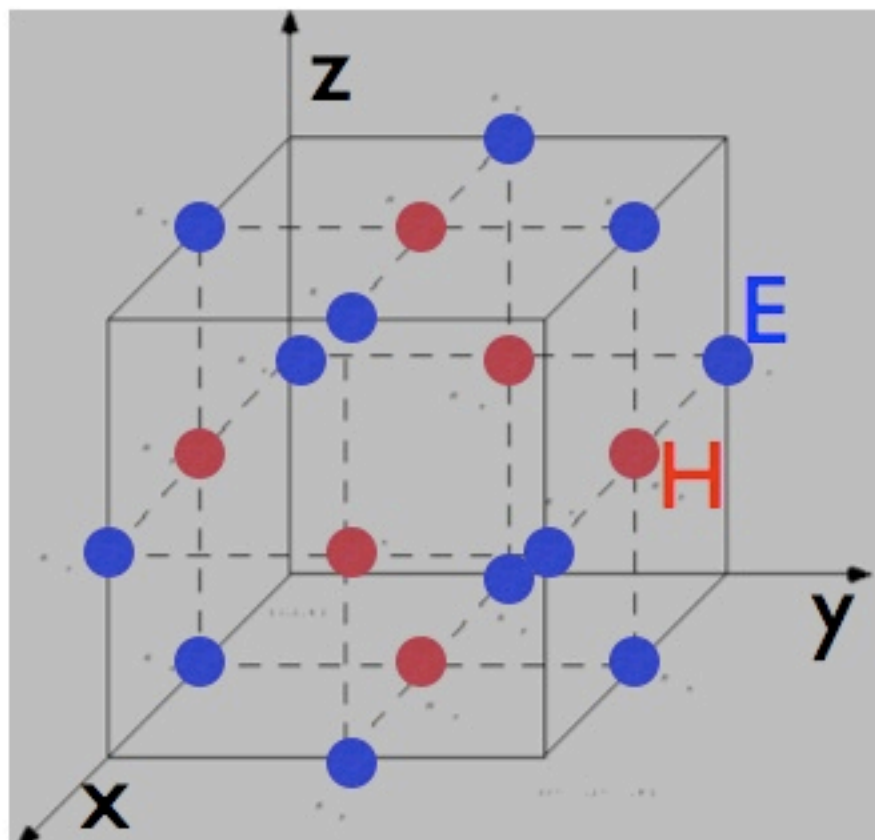
avec :

$$B_{i,j,k} = \frac{\Delta t}{\varepsilon(i,j,k)\delta}$$

Différences finies dans le domaine temporel

ces équations sont structurées de tel sorte que :

$(n-1/2)\Delta t$	$n\Delta t$	$(n+1/2)\Delta t$
$H_{(n-1/2)\Delta t}$	$E_{(n-1)\Delta t} \rightarrow E_{n\Delta t}$ $H_{(n-1/2)\Delta t}$	$E_{n\Delta t} \rightarrow H_{(n+1/2)\Delta t}$ $H_{(n-1/2)\Delta t}$



Il suffit de connaître les valeurs de E et H sur des maillages interlacés et on calcule alternativement $E(n\Delta t)$ et $H(m\Delta t)$ aux temps pairs et impairs

Différences finies dans le domaine temporel

Conditions de stabilité / taille du maillage :

$v_{\max}$: vitesse maximale de propagation de l'onde électromagnétique

Δt : pas temporel

δ : maillage

N : dimensionnalité

$$\frac{v_{\max} \Delta t}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

cas d'un maillage différent $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ sur x, y et z

$$v_{\max} \Delta t = \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{-1/2}$$

en pratique :

$$\delta = \lambda/10$$

Différences finies dans le domaine temporel

Sources :

Structure spatiale :

onde plane

source ponctuelle, Gaussienne,

Structure temporelle :

excitation harmonique (modes propres ?)

excitation impulsionnelle (réponse spectrale)

Exemples :

$$E^{inc} = E_o e^{-(x-x_o)^2/w^2}$$

source Gaussienne

$$E^{inc}(x, y, z) = E_o(x, y, z) \sin(\omega t)$$

$$E_x^{inc}(i + 1/2, j, k_s) = E_o(i + 1/2, j, k_s) \sin(2\pi f n \delta t)$$

onde plane

Techniquement le problème est plus délicat qu'il ne paraît, il existe deux approches

champ total / champ diffracté

IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, vol. 24, 397, 1982.

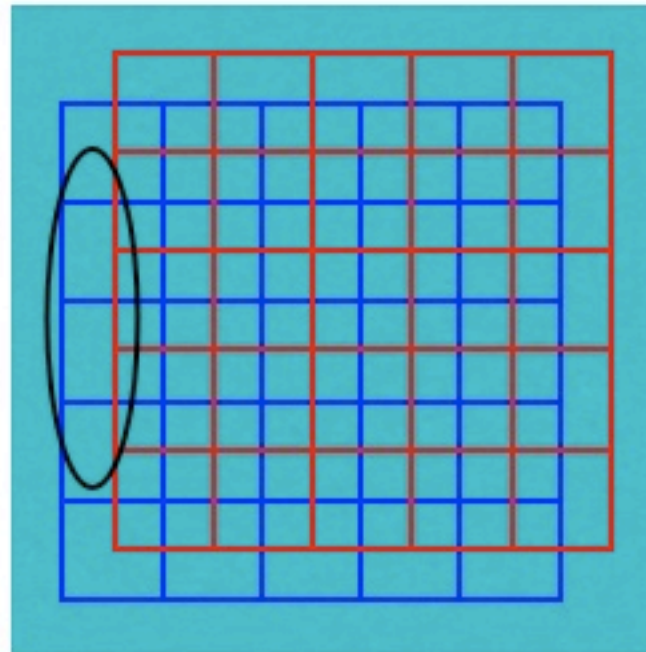
champ diffracté pur

The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics. CRC Press, 1993.

Différences finies dans le domaine temporel

Conditions aux bords :

Taille finie du domaine de calcul. Le champ sur la frontière est mal calculé car il manque certaines valeurs voisines



Stratégie 1 : ignorer les valeurs manquantes ($= 0$). Très mauvais. Réflexions parasites non physiques.

Différences finies dans le domaine temporel

Conditions de bord idéales : absorbeur parfait, $T=0$ et $R=0$

Par ordre de mérite et de difficulté de mise en œuvre :

Stratégie 2 : conditions de **Mur**. Simule la propagation d'une onde sortante au bord

IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. EMC-23, 377, 1981

Stratégie 3 : conditions de **Liao**. Interpolation des champs à l'interface

Sci. Sin., Ser.A, 27, 1063, 1984

Stratégie 4 : couche parfaitement accordée (**PML**). Simule en quelques périodes un matériau idéalement absorbant. Donne des résultats excellents avec une profondeur de seulement quelques mailles

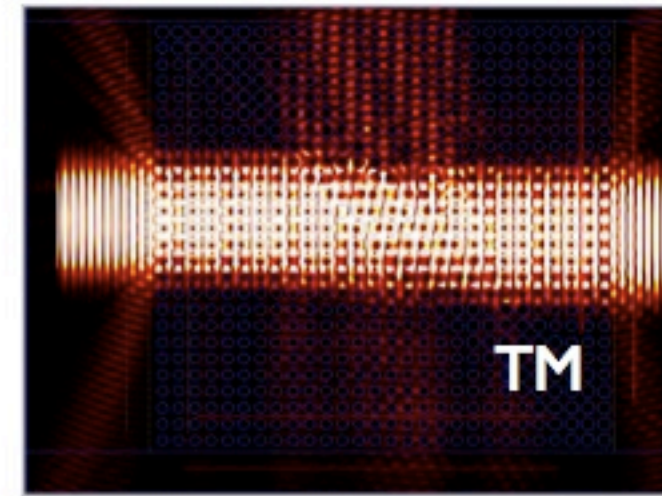
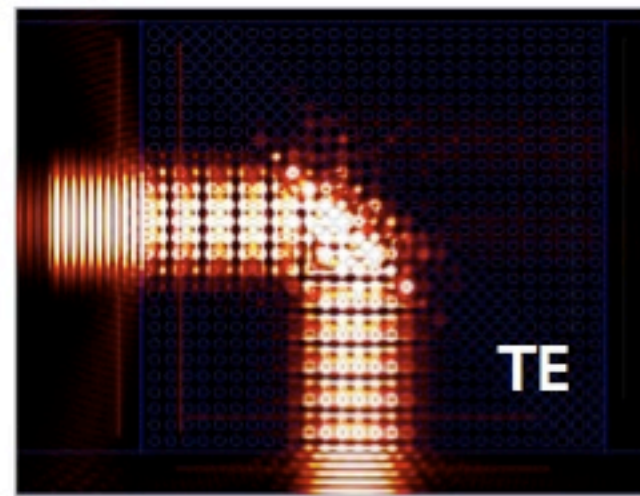
Journal of Computational Physics, 114, 185, 1994

Différences finies dans le domaine temporel

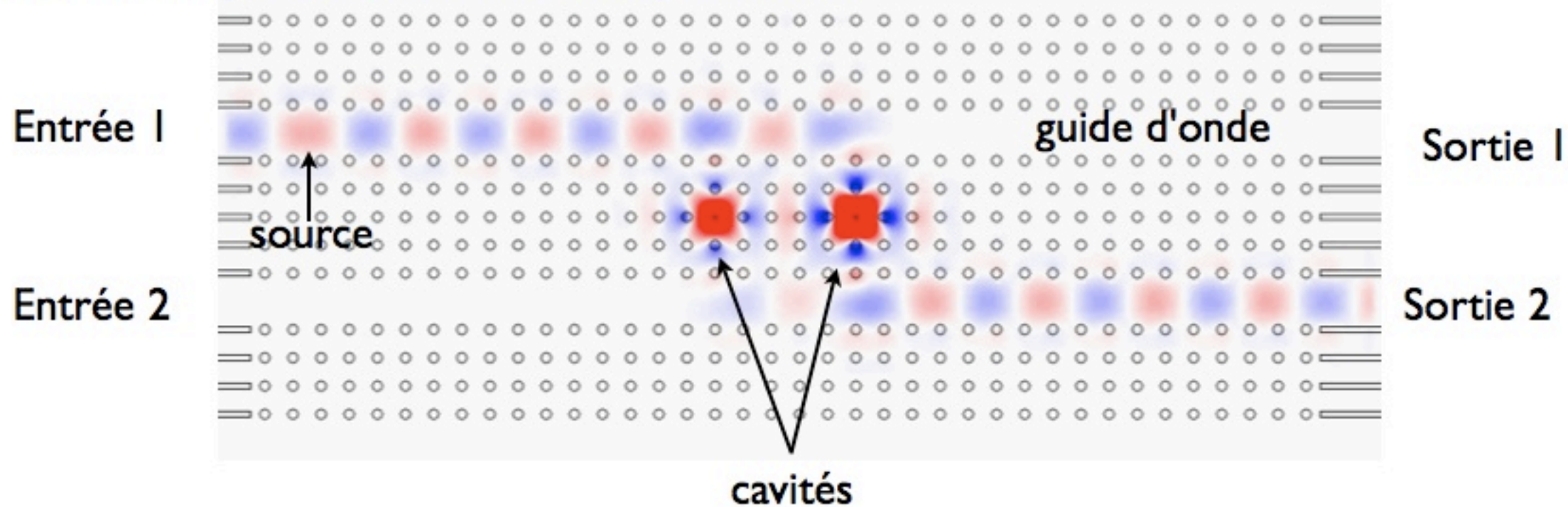
Exemples

Régime continu (harmonique)

Filtre polariseur



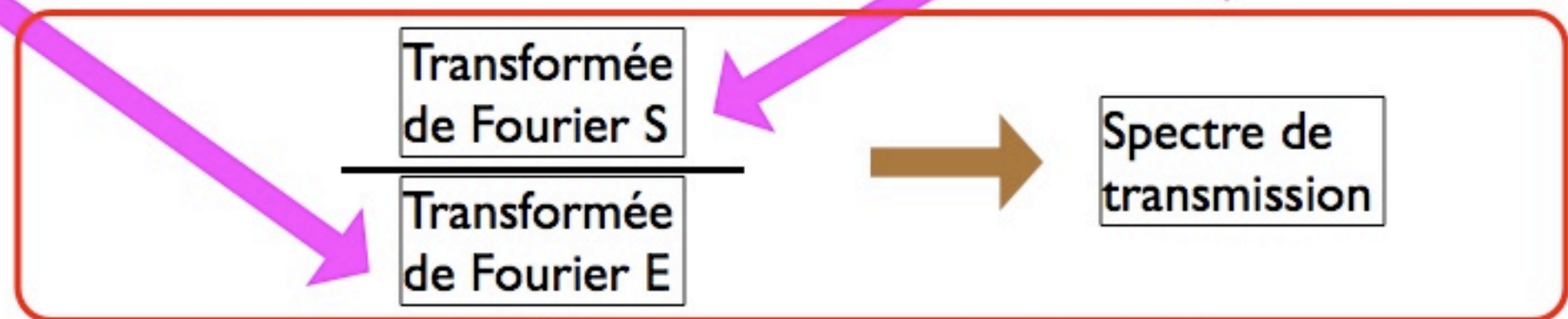
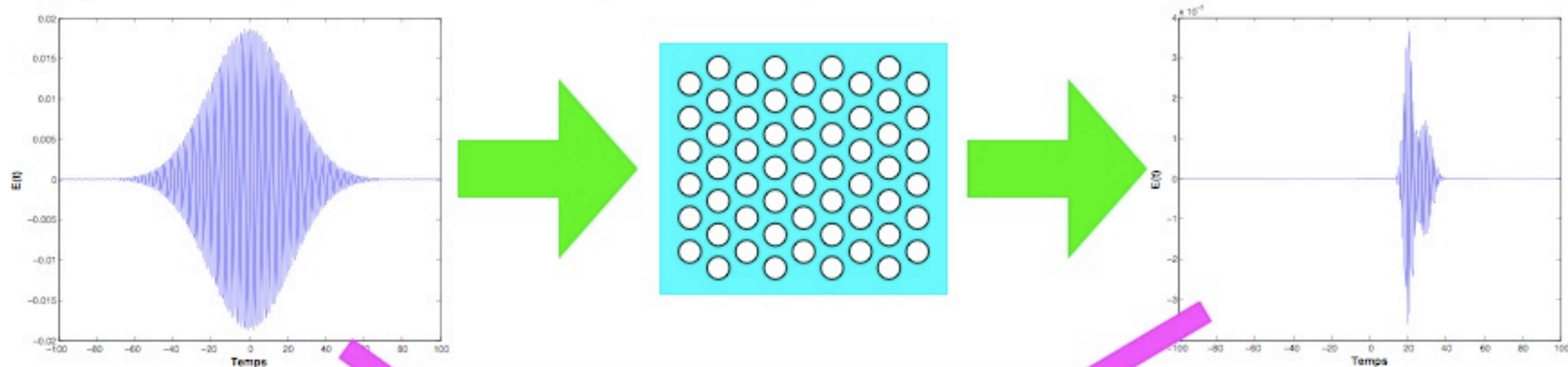
Filtre multiplexeur/démultiplexeur



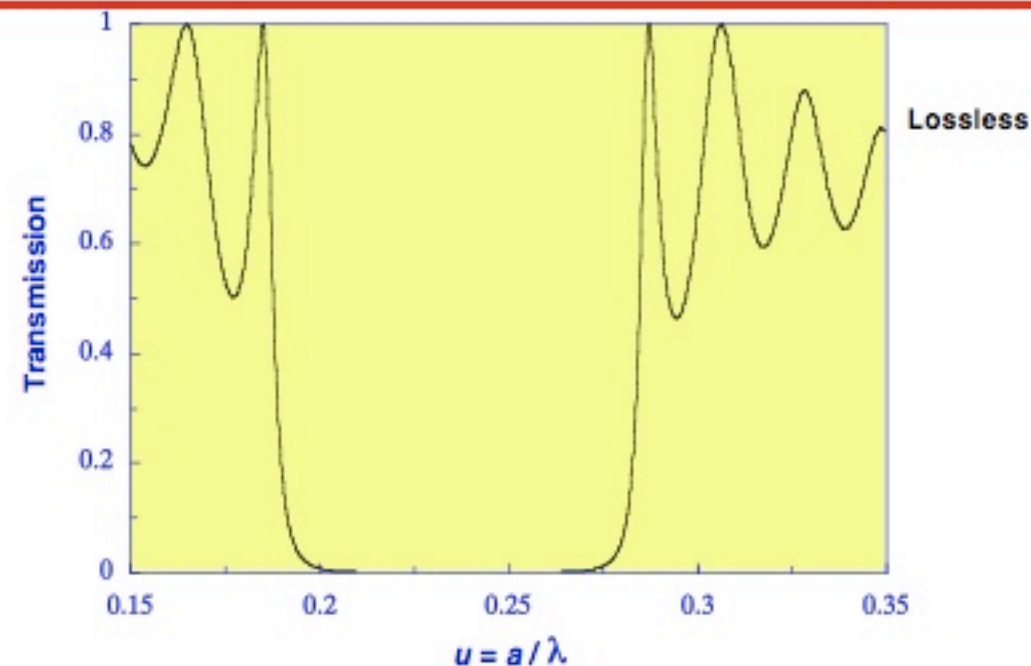
Différences finies dans le domaine temporel

Exemples

Régime impulsionnel, réponse spectrale

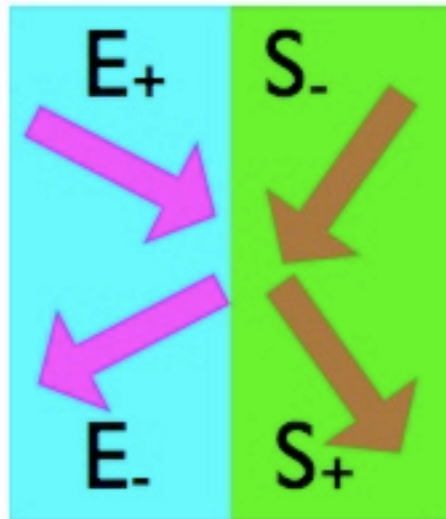


Exemple: transmission à travers 8 rangées, réseau triangulaire de trous, direction ΓK , TE :



Méthodes de matrice de transfert

Techniques de matrice de transfert pour les couches minces :



$$\begin{pmatrix} S_+ \\ S_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix}$$

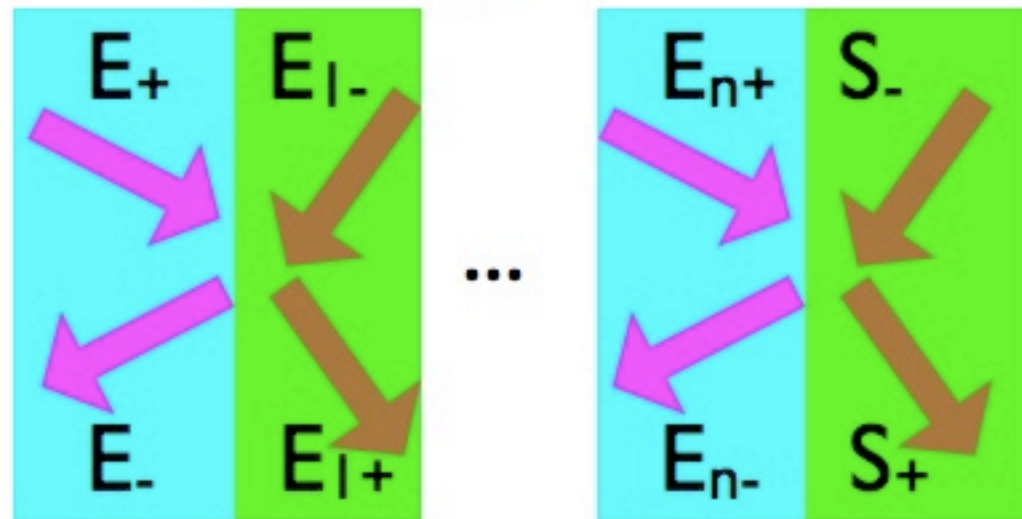
matrice de transfert

$$\begin{pmatrix} E_- \\ S_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ S_+ \end{pmatrix}$$

matrice de diffusion

a, b ... calculés selon lois de Fresnel

Couche complète :



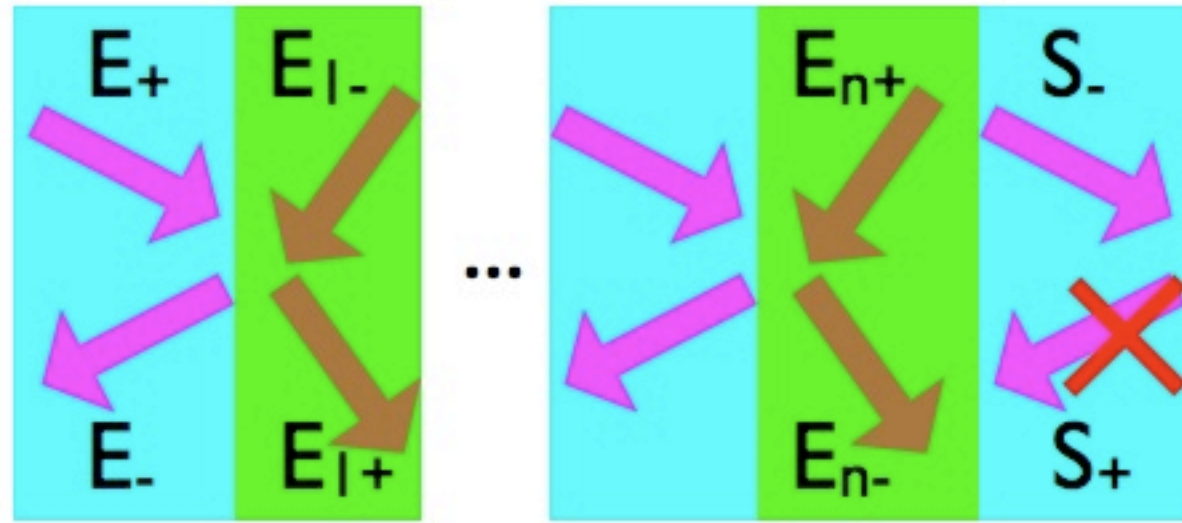
$$\begin{pmatrix} S_+ \\ S_- \end{pmatrix} = \prod_{i=1..n} T_i \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix}$$

avec T_i matrice de transfert à une interface ou bien matrice de propagation

Ref : tout bon livre d'optique

Méthodes de matrice de transfert

Les coefficients de réflexion et de transmission sont calculés en annulant la quatrième onde dans le milieu final, qui n'est pas excitée



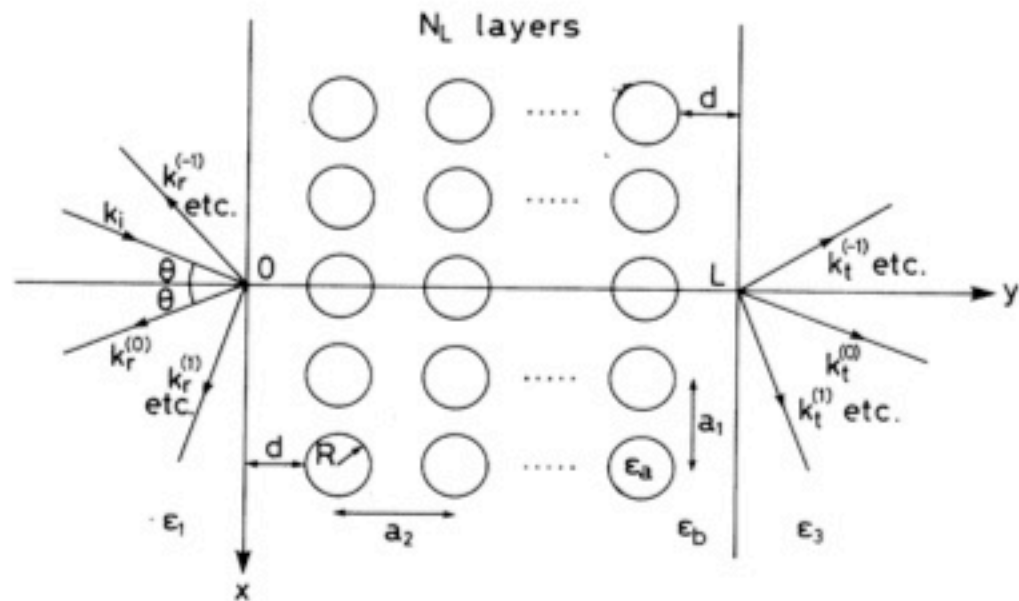
$$\begin{pmatrix} 0 \\ S_- \end{pmatrix} = \prod_{i=1..n} T_i \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{|E_-|^2}{|E_+|^2} \quad T = \frac{|S_+|^2}{|E_+|^2}$$

⚠ attention aux indices initiaux et finaux

Sakoda et autres méthodes de matrice de transfert

Généralisation des techniques de matrice de transfert pour les couches minces en incluant les modes diffractés



$$\begin{pmatrix} [S_+^i] \\ [S_-^i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+^i \\ E_-^i \end{pmatrix}$$

matrices de taille infinie, tronquées à l'ordre n

Toute la difficulté réside dans le calcul des coefficients de diffusion

- "Diffraction gratings", SPIE Milestone series, vol. MS83, 1993
- Pure Appl. Opt., 3, 975, 1994

Une variante due à S. Sakoda, implémente cette approche dans les cristaux photoniques 2D

- Phys. Rev. B, 52, 8992, 1995

Ces méthodes ont souvent de sérieux problèmes d'instabilités numériques

Autres techniques

Autres méthodes moins utilisées :

- multipolaire
- éléments finis
- équations intégrales / fonctions de Green
- méthode différentielle / ondes couplés
- homogénéisation
- fonction enveloppe / "masse effective"
- ...

Pour une revue et des références sur ces méthodes, voir par exemple :

Photonic crystals : towards nanoscale photonic devices / J.-M. Lourtioz, Berlin : Springer

Les cristaux photoniques ou la lumière en cage / J.-M. Lourtioz, Paris : Hermes-Sciences

Les codes accessibles

<http://www.pbglink.com/software.html>

Gratuits

- Meep <http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/Meep>
- MIT Photonic Band http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/MIT_Photonic_Bands
- CAMFR <http://camfr.sourceforge.net>
- Geo-Radar <http://carsten.welcomes-you.com/radarfdtd>
- GFDTD <http://gfdtd.kldp.net>
- BigBoy <http://sourceforge.net/projects/bigboy>
- EMP3 <http://www.fieldp.com/emp3/emp3.html>
- EM Explorer <http://www.emexplorer.net/news.htm>
- GprMax <http://www.gprmax.org/>

Commerciaux

- Photon Design (CrystalWave, OmniSim, FIMMPROP) <http://www.photond.com/>
- COMSOL <http://www.comsol.com/>
- RSoft <http://www.rsoftinc.com/>
- ISE / Synopsis <http://www.synopsys.com/>
- EM photonics <http://www.emphotonics.com/>
- Optiwave <http://www.optiwave.com/>
- Apollo Photonics <http://www.apollophoton.com/apollo/>
- SEMCAD http://www.iis.ee.ethz.ch/research/bioemc/em_simulation_platform.en.html
- Lumerical <http://www.lumerical.com/>