

### Série 8. Sommes

(1) *Sommes de Ramanujan.* On définit

$$c_m(n) := \sum_{a \bmod m}^* e\left(\frac{an}{m}\right),$$

où  $e(x) := e^{2\pi i x}$  et le symbole  $*$  indique que  $a$  est premier à  $m$ . Montrer

$$c_m(n) = \sum_{d|(m,n)} \mu\left(\frac{m}{d}\right) d.$$

(2) *Sommes de Gauss.*

(a) Soit  $\chi$  un caractère du groupe  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ . On définit

$$\tau(\chi) := \sum_{b \bmod m} \chi(b) e\left(\frac{b}{m}\right).$$

Montrer

$$|\tau(\chi)|^2 = \sum_{d|m} d \mu\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{\substack{u \bmod m \\ u \equiv 1 \bmod d}} \chi(u).$$

(b) On suppose que  $\chi$  est un caractère primitif. Soit

$$S(a, b) = \sum_{x \bmod m} \chi(ax + b), \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que  $S(a, b) = m\chi(b)$  si  $m|a$  et que  $S(a, b) = 0$  si  $m$  ne divise pas  $a$ .  
Indication : poser  $m_1 = m(a, m)/(a^2, m)$  et montrer que pour tout entier  $z$  on a  $\chi(1 + m_1 z)S(a, b) = S(a, b)$ .

(c) Montrer que  $|\tau(\chi)| = \sqrt{m}$  si  $\chi$  est un caractère primitif.