
Série 5 - énoncé**Rayonnement du corps noir, photométrie**19 mars 2012

Exercice 1 – Cryostat à Hélium

Un cryostat à hélium est constitué de deux enceintes, supposées sphériques. L'enceinte extérieure, de rayon $R_2 = 6$ cm, est à la température ambiante T_{amb} ($T_{\text{amb}} = 20^\circ\text{C}$). L'enceinte intérieure, de rayon $R_1 = 3$ cm, est en équilibre thermique avec l'hélium 4 liquide qu'elle contient, à la température de $T_{\text{He}} = 4,2$ K. Elle est ouverte sur l'extérieur par un petit tube. Le vide règne entre les deux enceintes. On assimilera les deux enceintes à des corps noirs.

- Quel type de transfert thermique a lieu?
- A quoi sert le petit tube. Calculer la masse d'hélium qui s'évapore de l'enceinte intérieure en une heure. (Chaleur latente d'évaporation de l'hélium $L_{\text{He}} = 82$ J/mol et masse molaire $M_{\text{He}} = 4$ g/mol)

Même question en interposant entre les deux enceintes une couronne sphérique d'épaisseur ε d'azote liquide à $T_{\text{N}_2} = 77$ K. Commenter. (Chaleur latente de vaporisation de l'azote : 198.4 J/g)

Exercice 2 – Couplage dans une fibre optique

On désire coupler de la lumière blanche provenant d'une lampe à incandescence dans une fibre optique. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe une limite thermodynamique à la puissance lumineuse qu'il est possible de coupler dans la fibre optique avec une lampe à incandescence et d'en donner une estimation.

Soit une fibre optique d'ouverture numérique NA et de diamètre de cœur d .

- Faire un schéma simple de la fibre optique, faisant apparaître la gaine (d'indice de réfraction n_1) et le cœur de la fibre (d'indice n_2) et l'angle maximum d'acceptance θ de la fibre. Rappeler la condition entre n_1 et n_2 pour que la fibre puisse guider la lumière. Rappeler l'expression de l'ouverture numérique (NA) de la fibre en fonction de θ .
- Donner l'expression de l'étendue optique U de la fibre en fonction de NA.
- Un système optique aplanétique et sans vignettage conserve l'étendue optique. A quelle condition le couplage de la source à incandescence dans la fibre sera-t-il maximal ?
- En supposant la condition 3 réalisée, donner l'expression de la puissance maximale, pour une plage spectrale donnée, couplée dans la fibre.
- On considère que la lampe à incandescence est un corps noir de type Lambertien. En déduire $P_{\text{max}}(T)$ en fonction des paramètres de la fibre.
- Application numérique : On prendra $\text{NA}=0.22$, $d=100$ μm (typique d'une fibre multimode), $T=5000$ K et la plage spectrale 800 – 1100 nm.

On donne : $\int_0^{\infty} \frac{u^3}{e^u - 1} du = \frac{\pi^4}{15}$ et : $\int_{2.55}^{3.5} \frac{u^3}{e^u - 1} du = 1.33$ (obtenu par calcul numérique)

Exercice 3 – Densité d'états quantique et classique 1D, 2D et 3D d'un milieu uniforme.

- Déterminer la relation de dispersion entre la fréquence angulaire ω et le vecteur d'onde k pour un électron de masse m dans un milieu uniforme. On notera V le potentiel uniforme.
- Même question que a) pour une onde électromagnétique.
- Donner la définition de la densité d'états $\rho_0(\nu)$.
- En utilisant l'approche développée dans le cours, déterminer la densité d'états électronique pour un système de dimension 3, 2 et 1.
- Même question que d) pour le cas d'une onde électromagnétique.
- Tracer les résultats obtenus aux questions d) et e).

On va reprendre les calculs précédents avec une approche plus général et plus formelle.

- Montrer que la densité d'état peut s'écrire de manière générale $\rho_0(\omega) = \frac{dk^2(\omega)}{d\omega} \int \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^d} \delta[k^2(\omega) - k'^2]$ avec en coordonnées cartésiennes $d\vec{k}' = dk_x'$ en 1D, $d\vec{k}' = dk_x' dk_y'$ en 2D et $d\vec{k}' = dk_x' dk_y' dk_z'$ en 3D
- Calculer $\frac{dk^2(\omega)}{d\omega}$ pour l'électron et pour l'onde électromagnétique.
- Déterminer la densité d'états électronique. On rappelle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta[x - a] dx = f(a)$.

Même question que i) pour une onde électromagnétique.