OPTICS II
Section de Physique
Cours: Pr. Romuald Houdré
Exercices: Nicolas Descharmes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Série 9 - corrigé
Coefficients d'Einstein, Quadratures de différents états du champs
23 avril 2012

Exercice 1 – Coefficients d'Einstein : émission spontannée, absorption et émission stimulée.

a) Les taux de transitions sont proportionnels à la densité d'énergie.

b) $dN_1/dt = -dN_2/dt = N_2A_{21} - N_1B_{12}W(\omega) + N_2B_{21}W(\omega)$

c) En utilisant la relation d'Einstein $\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}B_{21} = A_{21}$ et en comparant avec la loi de Planck $W(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}$, on obtient:

$$A_{21}/\left(B_{21}W(\omega)\right) = \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1$$

Pour montrer que $\bar{n} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}$, soit on se réfère au chapitre3 du cours, soit on écrit:

$\bar{n} = \sum_n nP_n$ avec P_n le facteur de Boltzmann

$$P_n = \frac{\exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)}{\sum_n \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)} = \frac{\exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)}{\sum_n \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)} = \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)\left(1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right)$$

et on utilise $\sum_n n\exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right) = -d\left(\sum_n \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)\right)/d\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\left(1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right)^{-2}$

d) $1/\bar{n} = 1 \Rightarrow \hbar\omega = kT\ln 2$ or à 300K $kT = 25meV$ et en outre $E_{[eV]} \approx \frac{1.24}{\lambda_{[\mu m]}}$ d'où $\lambda_t \approx 70\mu m$

e) Pour des longueurs d'ondes supérieures à 70µm, le taux d'émission stimulée thermiquement est supérieur au taux d'émission spontanée.

Pour des longueurs d'ondes inférieures à 70µm, c'est le contraire, le taux d'émission stimulée thermiquement est inférieur au taux d'émission spontanée.

Exercice 2 – Emissions spontanée et stimulée

a) Tout d'abord, on note que la densité de probabilité dans le temps, pour l'émission stimulée et l'absorption dans chaque mode n'est autre que le taux d'émission et d'émission stimulée dans un mode, lui-même donné par (avec n_g= = 1) :

$$\delta W_{abs/stim}(\nu) = \bar{n}(\nu)\frac{v_g}{V}\sigma(\nu) = \frac{c}{V\,n_g}\bar{n}(\nu)g(\nu)S$$

$$P_{stim}(\nu) = \delta W_{stim}(\nu) = \frac{c}{V}\bar{n}(\nu)g(\nu)S$$

La force d'oscillateur pour un atome dans une cavité vide (n=1) est liée au temps de vie d'émission spontanée par $t_{spont} = \frac{\lambda_0^{\ 2}}{8\pi S}$. On obtient donc la force d'oscillateur $S = \frac{\lambda_0^{\ 2}}{8\pi t_{spont}} = 65.10^{-9} cm^2.s^{-1}$

Pour chacun des modes, nous avons $\bar{n}(\nu) = \bar{n}(\nu + \Delta\nu) = n = 1000$ et $\frac{c}{V}S = 19.5\,s^{-2}$.

La forme de raie est Lorentzienne :

$$g(\nu) = \frac{\Delta\nu}{2\pi\left[(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2\right]}$$

d'où, pour chacun des modes de fréquence ν_0 et $\nu_0+\Delta\nu$:

$$g(\nu_0) = 12.7\,ps \quad \text{et} \quad g(\nu_0 + \Delta\nu) = \frac{g(\nu_0)}{5} = 2.6\,ps$$

on obtient finalement :

$$P_{stim}(\nu_0) = 2.48\cdot 10^{-7}\,s^{-1} = (4\cdot 10^6\,s)^{-1} \quad \text{et} \quad P_{stim}(\nu_0 + \Delta\nu) = 4.96\cdot 10^{-8}\,s^{-1} = (2\cdot 10^7\,s)^{-1}$$

b) L'équation bilan pour N_2 s'écrit :

$$\frac{dN_2}{dt} = -\left[P_{stim}(\nu_0) + Pstim(\nu_0 + \Delta\nu_0 + \frac{1}{t_{spont}}\right]N_2 = -\frac{1}{\tau}N_2$$

où seule l'interaction avec deux modes de cavité n'est considérée .

On remarque que $\frac{1}{\tau} = P_{stim}(\nu_0) + Pstim(\nu_0 + \Delta\nu_0) + \frac{1}{t_{spont}} = \frac{1}{4\cdot 10^6 s} + \frac{1}{2\cdot 10^7 s} + \frac{1}{3ms} \approx \frac{1}{3ms}$

Pour n=1000 photons dans chaque mode de cavité, l'émission spontanée est largement supérieure à l'émission stimulée. Pour inverser cette tendance, il faut que :

$$P_{stim}(\nu_0) + Pstim(\nu_0 + \Delta\nu_0) \geq \frac{1}{t_{spont}}$$

ce qui ne se produit que $n = 1.1\cdot 10^{12}$ photons dans chaque mode.

Exercice 3 – Quadrature de différents états du champ quantifié.

a) En développant les exponentielles complexes on obtient :

$$\hat{E}(\chi) = i\xi_0\left(\hat{a}_\omega(\cos(\chi) + i\sin(\chi)) - \hat{a}_\omega^+(\cos(\chi) - i\sin(\chi))\right)$$

$$\hat{E}(\chi) = i\xi_0\left((\hat{a}_\omega - \hat{a}_\omega^+)\cos(\chi) + i(\hat{a}_\omega + \hat{a}_\omega^+)\sin(\chi)\right)$$

$$\hat{E}(\chi) = \hat{E}_q\cos(\chi + \pi/2) + \hat{E}_p\sin(\chi + \pi/2)$$

avec $\hat{E}_q = \xi_0(\hat{a}_\omega + \hat{a}_\omega^+)$ et $\hat{E}_p = -i\xi_0(\hat{a}_\omega - \hat{a}_\omega^+)$

b) $\left[\hat{E}_q,\hat{E}_p\right] = \hat{E}_q\hat{E}_p - \hat{E}_p\hat{E}_q = -i\xi_0^2((\hat{a}_\omega + \hat{a}_\omega^+)(\hat{a}_\omega - \hat{a}_\omega^+) - (\hat{a}_\omega - \hat{a}_\omega^+)(\hat{a}_\omega + \hat{a}_\omega^+))$

$\left[\hat{E}_q,\hat{E}_p\right] = -i\xi_0^2\left(-2\left[\hat{a}_\omega,\hat{a}_\omega^+\right]\right) = 2i\xi_0^2$

c) Par définition la variance d'un opérateur $\hat{A}$ agissant sur un état $|\psi\rangle$ est donnée par :

$$(\Delta A)^2 = \langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle - \left(\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle\right)^2 = \left\langle \hat{A}^2\right\rangle - \left\langle \hat{A}\right\rangle^2$$

En posant $\hat{A}_\psi = \hat{A} - \left\langle \hat{A}\right\rangle$ la variance devient :

$$(\Delta A)^2 = \langle\psi|\hat{A}_\psi{}^2|\psi\rangle$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\left|\langle x,y\rangle\right|^2 \le \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$ (où x et y sont deux vecteur et $\langle\,,\rangle$ le produit scalaire) on a :

$$\forall|\psi\rangle \quad \sqrt{\langle\psi|\hat{A}_\psi^2|\psi\rangle\langle\psi|\hat{B}_\psi^2|\psi\rangle} \ge \left|\langle\psi|\hat{A}_\psi\hat{B}_\psi|\psi\rangle\right| \text{ ou encore } \sqrt{\langle\psi|\hat{A}_\psi^2|\psi\rangle\langle\psi|\hat{B}_\psi^2|\psi\rangle} \ge \left|\langle\psi|\hat{B}_\psi\hat{A}_\psi|\psi\rangle\right|$$

On en déduit :

$$\sqrt{\langle\psi|\hat{A}_\psi^2|\psi\rangle\langle\psi|\hat{B}_\psi^2|\psi\rangle} \ge \frac{1}{2}\left(\left|\langle\psi|\hat{A}_\psi\hat{B}_\psi|\psi\rangle\right| + \left|\langle\psi|\hat{B}_\psi\hat{A}_\psi|\psi\rangle\right|\right)$$

or d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left|\langle\psi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle\right| + \left|\langle\psi|\hat{B}\hat{A}|\psi\rangle\right| \ge \left|\langle\psi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{B}\hat{A}|\psi\rangle\right| = \left|\left\langle\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\rangle\right|$$

donc finalement :

$$\sqrt{\langle\psi|\hat{A}_\psi^2|\psi\rangle\langle\psi|\hat{B}_\psi^2|\psi\rangle} \ge \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\hat{A}_\psi,\hat{B}_\psi\right]\right\rangle\right|$$

c'est-à-dire :

$$\Delta A\cdot\Delta B \ge \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\rangle\right|$$

d) De la question précédente on déduit :

$$\Delta E_q\Delta E_p \ge \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\hat{E}_q,\hat{E}_p\right]\right\rangle\right|$$

or $\left[\hat{E}_q,\hat{E}_p\right] = 2i\xi_0^2$

donc $\Delta E_q \Delta E_p \geq \xi_0^2$

e) $\langle n\rangle = \langle\alpha|n|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^+a|\alpha\rangle = |\alpha|^2$ car $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ et $\langle\alpha|a^+ = \langle\alpha|\alpha^*$

Remarque : pour alléger les notations nous avons omis la fréquence en indice des opérateurs création et annihilation.

f) $\langle n^2\rangle = \langle\alpha|\hat{n}^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^+aa^+a|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^+(1-a^+a)a|\alpha\rangle = |\alpha|^2 + \langle\alpha|a^+(a^+a)a|\alpha\rangle$

$\langle n^2\rangle = |\alpha|^2 + |\alpha|^2\langle\alpha|(a^+a)|\alpha\rangle = |\alpha|^2 + |\alpha|^4$

$\langle n^2\rangle = \langle n\rangle + \langle n\rangle^2$

On en déduit : $(\Delta n)^2 = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = \langle n\rangle$

g) $P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-\langle n\rangle}\dfrac{\langle n\rangle^n}{n!}$. On retrouve une distribution de Poisson.

h) $\langle E_q\rangle = \langle\alpha|\hat{E}_q|\alpha\rangle = \xi_0\langle\alpha|\hat{a}+\hat{a}^+|\alpha\rangle = 2\xi_0\,\mathrm{Re}\{\alpha\} = 2\xi_0|\alpha|\cos(\arg(\alpha))$

$\langle E_p\rangle = \langle\alpha|\hat{E}_p|\alpha\rangle = -i\xi_0\langle\alpha|\hat{a}-\hat{a}^+|\alpha\rangle = 2\xi_0\,\mathrm{Im}\{\alpha\} = 2\xi_0|\alpha|\sin(\arg(\alpha))$

Par ailleurs :

$\langle E_q^2\rangle = \langle\alpha|\hat{E}_q^2|\alpha\rangle = \xi_0^2\langle\alpha|(\hat{a}+\hat{a}^+)^2|\alpha\rangle = \xi_0^2\langle\alpha|\hat{a}^2 + 2\hat{a}^+\hat{a} + 1 + \hat{a}^{+2}|\alpha\rangle = \xi_0^2(\alpha^2 + 2|\alpha|^2 + 1 + \alpha^{*2})$

$\langle\Delta E_q\rangle^2 = \langle E_q^2\rangle - \langle E_q\rangle^2 = \xi_0^2(\alpha^2 + 2|\alpha|^2 + 1 + \alpha^{*2}) - \xi_0^2(\alpha+\alpha^*)^2 = \xi_0^2$

de même

$\langle\Delta E_q\rangle^2 = \langle E_q^2\rangle - \langle E_p\rangle^2 = \xi_0^2$

d'où

$\Delta E_q \Delta E_p = \xi_0^2$

On a montré que l'état cohérent est un état à principe d'incertitude minimum.

i) $\langle\alpha|\hat{E}(\chi)|\alpha\rangle = \langle E(\chi)\rangle = \langle\alpha|\hat{E}_q|\alpha\rangle\cos(\chi+\pi/2) + \langle\alpha|\hat{E}_p|\alpha\rangle\sin(\chi+\pi/2)$

$\langle\alpha|\hat{E}(\chi)|\alpha\rangle = 2\xi_0|\alpha|\sin(\chi+\pi/2-\arg(\alpha))$

par ailleurs :

$\langle E(\chi)^2\rangle = \langle\alpha|\hat{E}(\chi)^2|\alpha\rangle$

$$\langle E^2\rangle = \langle E_q^2\rangle \cos^2(\chi') + \langle E_p^2\rangle \sin^2(\chi') + 2\langle\alpha|\hat{E}_p\hat{E}_q|\alpha\rangle \sin(\chi')\cos(\chi') + 2i\xi_0^2 \sin(\chi')\cos(\chi')$$

avec $\chi' = \chi + \pi/2$ et où on a utiliser la valeur du commutateur des quadratures.

En utilisant

$$\langle\alpha|\hat{E}_p\hat{E}_q|\alpha\rangle = i\xi_0^2(\alpha^2 - \alpha^{*2} + 1),$$

$$\langle E_q^2\rangle = \xi_0^2(\alpha^2 + 2|\alpha|^2 + 1 + \alpha^{*2})$$

$$\langle E_p^2\rangle = -\xi_0^2(\alpha^2 - 2|\alpha|^2 - 1 + \alpha^{*2})$$

$$(\Delta E(\chi))^2 = \langle E(\chi)^2\rangle - \langle E(\chi)\rangle^2$$

on trouve :

$$(\Delta E(\chi))^2 = (\Delta E_q)^2 = (\Delta E_p)^2 = \xi_0^2$$

La représentation graphique est donnée dans le cours

j) $\mathrm{SNR} = \dfrac{\langle E(\chi)\rangle^2}{(\Delta E(\chi))^2} = \dfrac{|\alpha|^2}{\xi_0^2}\sin^2(\chi + \pi/2 - \arg(\alpha)) = \dfrac{\langle n\rangle^2}{\xi_0^2}\cos^2(\chi - \arg(\alpha))$

Le rapport signal sur bruit a une valeur maximale de $\langle n\rangle^2/\xi_0^2$ quand $\chi = \arg(\alpha)$, c'est-à-dire quand le signal cohérent est maximum, étant donné que le bruit est indépendant de la phase.

k) $\langle n\rangle = \langle n|\hat{n}|n\rangle = \langle n|(n|n\rangle) = n$

l) $\langle n^2\rangle = n^2$ d'où $(\Delta n)^2 = n^2$

m) $P(n) = |\langle n|n\rangle|^2 = 1$ ce qui est évident du fait de la définition de l'état nombre.

n) $\langle E_q\rangle = \langle n|\hat{E}_q|n\rangle = \xi_0\langle n|(\hat{a} + \hat{a}^+)|n\rangle = 0$

de même $\langle E_p\rangle = \langle n|\hat{E}_p|n\rangle = 0$

$$\langle E_q^2\rangle = \langle n|\hat{E}_q^2|n\rangle = \xi_0^2\langle n|\hat{a}^2 + 2\hat{a}^+\hat{a} + 1 + \hat{a}^{+2}|n\rangle = \xi_0^2(2n+1)$$

de même $\langle E_p^2\rangle = \langle n|\hat{E}_p^2|n\rangle = \xi_0^2(2n+1)$

d'où $(\Delta E_q)^2 = (\Delta E_p)^2 = \xi_0^2(2n+1)$ et $\Delta E_q \Delta E_p = \xi_0^2(2n+1)$

L'état nombre est un état à principe d'incertitude minimum seulement pour n=0.

o) $\langle E(\chi)\rangle = 0$ et $\left(\Delta E(\chi)\right)^2 = \xi_0^2(2n+1)$

La représentation graphique est donnée dans le cours

p) Comme

$$\hat{S}(\zeta)\hat{S}^+(\zeta) = \exp\left(\frac{1}{2}\zeta^*\hat{a}^2 - \frac{1}{2}\zeta(\hat{a}^+)^2\right)\left(\exp\left(\frac{1}{2}\zeta^*\hat{a}^2 - \frac{1}{2}\zeta(\hat{a}^+)^2\right)\right)^+$$

$$\hat{S}(\zeta)\hat{S}^+(\zeta) = \exp\left(\frac{1}{2}\zeta^*\hat{a}^2 - \frac{1}{2}\zeta(\hat{a}^+)^2\right)\exp\left(\frac{1}{2}\zeta(\hat{a}^+)^2 - \frac{1}{2}\zeta^*\hat{a}^2\right) = 1 = \hat{S}^+(\zeta)\hat{S}(\zeta)$$

Remarque: faire attention avec les exponentiels d'un opérateur, $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]}$

on peut écrire :

$$\langle n\rangle = \langle\zeta|\hat{a}^+\hat{a}|\zeta\rangle = \langle 0|\hat{S}^+(\zeta)\hat{a}^+\hat{S}(\zeta)\hat{S}^+(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta)|0\rangle$$

Par ailleurs,

$$\hat{S}^+(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta) = e^{-\hat{O}}\hat{a}e^{\hat{O}} \text{ avec } \hat{O} = \frac{1}{2}\zeta^*\hat{a}^2 - \frac{1}{2}\zeta(\hat{a}^+)^2$$

de plus $\left[\hat{a},\frac{1}{2}\zeta^*\hat{a}^2 - \frac{1}{2}\zeta(\hat{a}^+)^2\right] = -\zeta\hat{a}^+$ et $\left[\hat{a}^+,\frac{1}{2}\zeta^*\hat{a}^2 - \frac{1}{2}\zeta(\hat{a}^+)^2\right] = -\zeta^*\hat{a}$

où on a utilisé $\left[\hat{a},\hat{a}^{+2}\right] = 2\hat{a}^+$ et $\left[\hat{a}^+,\hat{a}^2\right] = -2\hat{a}$

$$\hat{S}^+(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta) = e^{-\hat{O}}\hat{a}e^{\hat{O}} = \hat{a} + \left[\hat{a},\hat{O}\right] + \frac{1}{2!}\left[\left[\hat{a},\hat{O}\right],\hat{O}\right] + \frac{1}{3!}\left[\left[\left[\hat{a},\hat{O}\right],\hat{O}\right],\hat{O}\right] + \ldots$$

$$\hat{S}^+(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta) = \hat{a} - \zeta\hat{a}^+ + \frac{1}{2!}\left[-\zeta\hat{a}^+,\hat{O}\right] + \frac{1}{3!}\left[\left[-\zeta\hat{a}^+,\hat{O}\right],\hat{O}\right] + \ldots$$

$$\hat{S}^+(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta) = \hat{a} - \zeta\hat{a}^+ + \frac{1}{2!}|\zeta|^2\hat{a} + \frac{1}{3!}\left[|\zeta|^2\hat{a},\hat{O}\right] + \ldots$$

$$\hat{S}^+(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta) = \hat{a} - \zeta\hat{a}^+ + \frac{1}{2!}(-1)^2|\zeta|^2\hat{a} + \frac{1}{3!}(-1)^3|\zeta|^2\zeta\hat{a}^+ + \ldots$$

$$\hat{S}^+(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta) = \left(1 + \frac{1}{2!}(-1)^2|\zeta|^2 + \frac{1}{2!}(-1)^4|\zeta|^4 + \ldots\right)\hat{a} + \left(-1\zeta + \frac{1}{3!}(-1)^3|\zeta|^2\zeta + \frac{1}{5!}(-1)^5|\zeta|^4\zeta + \ldots\right)\hat{a}^+$$

on reconnaît les développement du cosh et du sinh, d'où le résultat

$$\hat{S}^+(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta) = \hat{a}\cosh s - \hat{a}^+e^{i\vartheta}\sinh s$$

en prenant l'adjoint :

$$\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{a}^{+}\hat{S}(\zeta) = \hat{a}^{+}\cosh s - \hat{a}e^{-i\theta}\sinh s$$

$$\langle n\rangle = \langle 0|\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{a}^{+}\hat{S}(\zeta)\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta)|0\rangle$$

$$\langle n\rangle = \langle 0|(\hat{a}^{+}\cosh s - \hat{a}e^{-i\theta}\sinh s)(\hat{a}\cosh s - \hat{a}^{+}e^{i\theta}\sinh s)|0\rangle$$

en utilisant $\hat{a}|0\rangle = 0$ et $\langle 0|\hat{a}^{+} = 0$ on trouve :

$$\langle n\rangle = \sinh^2 s$$

q) $\langle n^2\rangle = \langle\zeta|\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{a}^{+}\hat{a}|\zeta\rangle = \langle 0|\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{a}^{+}\hat{S}(\zeta)\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta)\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{a}^{+}\hat{S}(\zeta)\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta)|0\rangle$

$$\langle n^2\rangle = \langle 0|(\hat{a}^{+}\cosh s - \hat{a}e^{-i\theta}\sinh s)\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta)\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{a}^{+}\hat{S}(\zeta)(\hat{a}\cosh s - \hat{a}^{+}e^{i\theta}\sinh s)|0\rangle$$

$$\langle n^2\rangle = \langle 1|\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta)\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{a}^{+}\hat{S}(\zeta)|1\rangle\sin^2 hs$$

$$\langle n^2\rangle = \langle 1|(\hat{a}^{+}\cosh s - \hat{a}e^{-i\theta}\sinh s)(\hat{a}\cosh s - \hat{a}^{+}e^{i\theta}\sinh s)|1\rangle\sin^2 hs$$

$$\langle n^2\rangle = (\langle 0|\cosh s - \langle 2|\sqrt{2}e^{-i\theta}\sinh s)(\cosh s|0\rangle - e^{i\theta}\sinh s\sqrt{2}|2\rangle)\sin^2 hs$$

$$\langle n^2\rangle = (\cosh^2 s + 2\sinh^2 s)\sin^2 hs = (1 + \sinh^2 s + 2\sinh^2 s)\sin^2 hs$$

$$\langle n^2\rangle = 3\sinh^4 s + 2\sinh^2 s$$

On en déduit

$$(\Delta n)^2 = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2 = 2\langle n\rangle(\langle n\rangle + 1)$$

r) $\langle E_q\rangle = \langle\zeta|\hat{E}_q|\zeta\rangle = \xi_0\langle\zeta|(\hat{a} + \hat{a}^{+})|\zeta\rangle = 0$

car $\langle\zeta|\hat{a}|\zeta\rangle = \langle\zeta|\hat{a}^{+}|\zeta\rangle = 0$ (cf. $\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta) = \hat{a}\cosh s - \hat{a}^{+}e^{i\theta}\sinh s$)

de même $\langle E_q\rangle = \langle\zeta|\hat{E}_q|\zeta\rangle = 0$

En utilisant $\langle\zeta|\hat{a}\hat{a}|\zeta\rangle = -e^{i\theta}\sinh s\cosh s$ et $\langle\zeta|\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}|\zeta\rangle = -e^{-i\theta}\sinh s\cosh s$

$$\langle E_q^2\rangle = \langle\zeta|\hat{E}_q^2|\zeta\rangle = \xi_0^2\langle\zeta|\hat{a}^2 + 2\hat{a}^{+}\hat{a} + 1 + \hat{a}^{+2}|\zeta\rangle = \xi_0^2\left\{e^{2s}\sin^2(\tfrac{1}{2}\theta) + e^{-2s}\cos^2(\tfrac{1}{2}\theta)\right\}$$

de même $\langle E_p^2\rangle = \langle\zeta|\hat{E}_p^2|\zeta\rangle = \xi_0^2\left\{e^{2s}\cos^2(\tfrac{1}{2}\theta) + e^{-2s}\sin^2(\tfrac{1}{2}\theta)\right\}$

d'où

$$\Delta E_q\Delta E_p = \xi_0^2\sqrt{e^{4s}\sin^2(\tfrac{1}{2}\theta)\cos^2(\tfrac{1}{2}\theta) + \sin^4(\tfrac{1}{2}\theta) + \cos^4(\tfrac{1}{2}\theta) + e^{-4s}\sin^2(\tfrac{1}{2}\theta)\cos^2(\tfrac{1}{2}\theta)}$$

On obtient une ellipse centrée à l'origine, dont la longueur du grand axe vaut $\xi_0 e^{s}$ et celle du petit axe $\xi_0 e^{-s}$ et l'angle d'inclinaison $\theta/2$.

s) De façon immédiate :

$$\langle E(\chi)\rangle = 0$$

$$(\Delta E(\chi))^2 = \xi_0^2\left\{e^{2s}\sin^2(\chi - \tfrac{1}{2}\vartheta) + e^{-2s}\cos^2(\chi - \tfrac{1}{2}\vartheta)\right\}$$

t) $\Delta E_{min} = \xi_0 e^{-s}$ et $\Delta E_{max} = \xi_0 e^{s}$

d'où $\Delta E_{min}\Delta E_{max} = \xi_0{}^2$

ce qui satisfait le principe d'incertitude minimum.

u) En utilisant $\hat{D}^{+}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$ qui s'obtient avec $\left[a, \exp(\beta\hat{a}^{+})\right] = \beta\exp(\beta\hat{a}^{+})$ (il faut se rappeler $\left[a, (\hat{a}^{+})^{n}\right] = n(\hat{a}^{+})^{n-1}$) , on trouve

$$\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{D}^{+}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta) = \hat{a}\cosh s - \hat{a}^{+}e^{i\vartheta}\sinh s + \alpha$$

A partir de cette dernière relation la procédure est identique au cas précédent du vide compressé :

$\langle n\rangle = \sinh^2 s + |\alpha|^2$ et

$$(\Delta n)^2 = |\alpha|^2\left\{e^{2s}\sin^2(\arg(\alpha) - \tfrac{1}{2}\vartheta) + e^{-2s}\cos^2(\arg(\alpha) - \tfrac{1}{2}\vartheta)\right\} + 2\sinh^2 s(\sinh^2 s + 1)$$

Les quadratures sont identiques au cas précédent :

$$\langle E_q^2\rangle = \xi_0^2\left\{e^{2s}\sin^2(\tfrac{1}{2}\vartheta) + e^{-2s}\cos^2(\tfrac{1}{2}\vartheta)\right\}$$

$$\langle E_p^2\rangle = \xi_0^2\left\{e^{2s}\cos^2(\tfrac{1}{2}\vartheta) + e^{-2s}\sin^2(\tfrac{1}{2}\vartheta)\right\}$$

L'ellipse est translatée de l'origine du fait de l'opérateur déplacement.

Et la moyenne est cette fois-ci non nulle :

$$\langle \hat{E}(\chi)\rangle = |\alpha|\cos(\chi - \arg(\alpha))$$

$$(\Delta E(\chi))^2 = \xi_0^2\left\{e^{2s}\sin^2(\chi - \tfrac{1}{2}\vartheta) + e^{-2s}\cos^2(\chi - \tfrac{1}{2}\vartheta)\right\}$$

v) $$SNR = \frac{\langle E(\chi)\rangle^2}{(\Delta E(\chi))^2} = \frac{\langle n\rangle^2\cos^2(\chi - \arg(\alpha))}{\xi_0^2\left\{e^{2s}\sin^2(\chi - \tfrac{1}{2}\vartheta) + e^{-2s}\cos^2(\chi - \tfrac{1}{2}\vartheta)\right\}}$$

$$SNR_{max} = \frac{\langle n\rangle^2}{\xi_0^2}e^{2s}$$

Par rapport à l'état cohérent le rapport signal sur bruit augmente d'un facteur e^{2s}