

## Chapitre 3 : Rayonnement électromagnétique du corps noir et photométrie

### **Bibliographie :**

Fundamentals of photonics / B.E.A. Saleh et M.C. Tech, en anglais  
Optoélectronique / E. Rosencher et B. Vinter, en français  
Optique / J.P. Pérez, en français  
Lasers / P. Milonni et J. Eberly, en anglais  
Lasers and electro-optics / C.C. Davis, en anglais  
Principle of optics / M. Born et E. Wolf, en anglais

Note: certaines des figures du chapitre ont été copiées ou inspirées de ces références.

## Une page d'histoire



Jozef Stefan 1835-1893  
Loi de Stefan-Boltzmann.



Ludwig Boltzmann  
1844-1906  
Loi de Stefan - Boltzmann,  
physique statistique.



Wilhelm Wien 1864-1928  
Loi de Wien.



Max Planck 1858-1947  
Rayonnement du corps noir,  
quantum d'énergie électromagnétique.



Ἰππάρχος (Hipparque)  
190-120 av. J.-C.  
Classification des étoiles par  
magnitude.



Pierre Bouguer 1698-1758  
Premier traité de photométrie, loi  
de Bouguer (Lambert-Beer).



Johann Lambert 1728-1777  
Photomètre, loi de Bouguer-  
Lambert-Beer.

## 3.1 Introduction.

La compréhension du rayonnement thermique (spectre d'émission, intensité, ...) émis par un corps absorbant et porté à une température  $T$  est un problème important à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. Les théories thermodynamiques de l'époque et la toute nouvelle physique statistique étaient incapables de prédire le spectre d'émission et pire même prévoaient des spectres qui divergeaient vers l'infini aux fréquences élevées, ce que l'on a appelé la catastrophe ultra-violette.

Planck en 1900 résout le problème en invoquant pour la première fois l'hypothèse des quanta. C'est le début des théories quantiques du champ électromagnétique, bien que Planck n'y ait vu, à l'époque, qu'une technique de calcul sans signification physique.

Le but de ce chapitre est au travers de l'explication du rayonnement du corps noir, d'introduire différentes briques élémentaires qui serviront à plusieurs reprises dans ce cours : résonateur optique, densité d'états, photométrie, statistique d'occupation.

## 3.2 Phénoménologie du rayonnement du corps noir.

Un corps noir est un objet qui absorbe tout rayonnement incident et qui peut rayonner de l'énergie électromagnétique lorsqu'il est porté à une température finie. Si ce corps est chauffé à la température  $T$ , de l'énergie s'en échappe sous forme de rayonnement thermique. Les exemples dans la vie de tous les jours sont le soleil, une barre de fer incandescente, etc... Deux lois sont bien établies expérimentalement au XIX<sup>ème</sup> :



*Une coulée de lave.*

### 3.2.1 Loi de Stefan-Boltzmann.

La puissance totale rayonnée par un corps noir de surface  $A$  est

$$P_{\text{émis}} = A\sigma T^4 \quad \text{Loi de Stefan-Boltzmann}$$

où  $\sigma$  est une constante universelle, dite constante de Stefan  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$ .

Pour un objet réel qui n'est pas parfaitement absorbant on a  $P_{\text{émis}} = \varepsilon A \sigma T^4$  où  $\varepsilon$  est l'émissivité du corps.  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  (la neige fond autour d'un corps sombre, signe que celui-ci absorbe et rayonne plus d'énergie thermique que la neige).



*Corps noirs de différentes émissivités.*

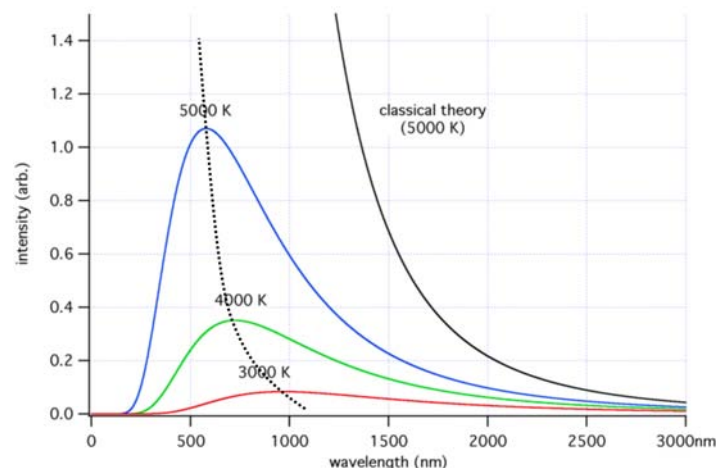
*(Crédit photographique : Crystel Houdré)*

Exemples de valeur de l'émissivité :

Matériau	Emissivité $\varepsilon$
Aluminium	0,02
Papier blanc	0,87
Béton	0,94
Suie	0,95

### 3.2.2 Loi de déplacement de Wien.

Le spectre de la lumière émise a une forme en cloche asymétrique et tend vers 0 pour les petites et les grandes longueurs d'ondes.



*Spectres d'émission de corps noir.*

le maximum du spectre a lieu à une longueur d'onde inversement proportionnelle à la température.

$$\lambda_{\max}(T) \cdot T \approx \text{cst} = 2,89 \cdot 10^3 \mu\text{m} \cdot \text{K} \quad \text{Loi de déplacement de Wien}$$

A température ambiante  $\lambda_{\max} = 10 \mu\text{m}$ . Les systèmes d'imagerie nocturne très prisés des militaires sont souvent des systèmes d'imagerie qui restituent une image autour de  $10 \mu\text{m}$  afin de visualiser des différences de température (un corps à  $37^\circ\text{C}$  sur un fond plus chaud ou plus froid).



*Image thermique d'une façade d'immeuble permettant de localiser les pertes thermiques*

Certains milieux opaques dans le visible sont transparents dans l'infra-rouge et une caméra sensible à ces longueurs d'onde permet de faire une image thermique au travers.

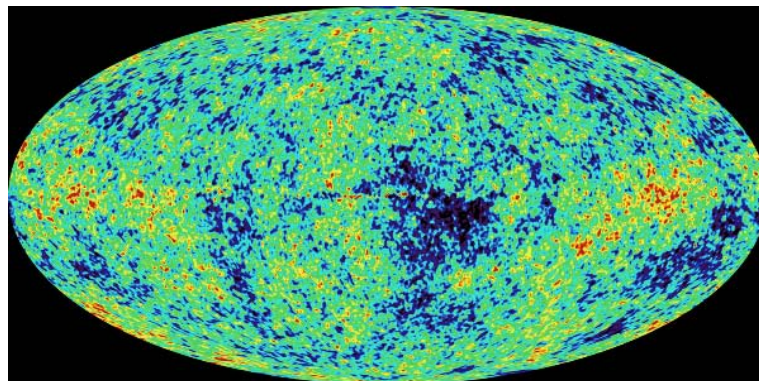


*Image dans le spectre visible*



*Image du rayonnement thermique.*

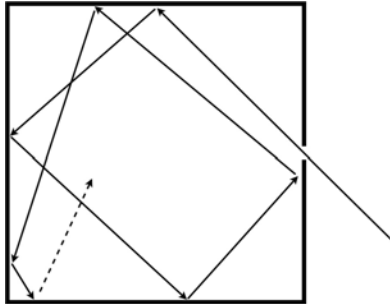
Autre exemple, le rayonnement cosmologique découvert A. Penzias et R. Wilson, en 1964 :



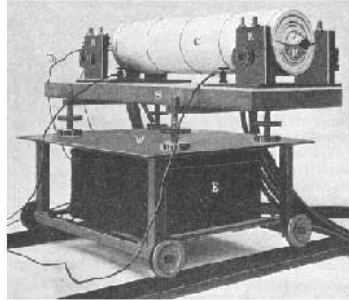
*Carte du rayonnement cosmologique à 2,725 K (160.2 GHz, 1.9 mm).*

On idéalise un corps noir par une grande enceinte dont les parois sont chauffées à la température  $T$  et qui est percée d'un petit trou de sorte que :

- Tout rayon incident sur le trou est piégé dans l'enceinte.
- Le trou est suffisamment petit pour ne pas perturber l'équilibre entre le rayonnement électromagnétique dans l'enceinte et les parois.



*Corps noir idéal*



*Dispositifs expérimentaux historiques d'étude du corps noir.*

La première étape qui va nous intéresser dans le chapitre suivant est la description des modes électromagnétiques qui existe dans cette cavité et de les compter, ce qui conduira à la notion de densité d'états.

### 3.3 Photométrie

La photométrie est l'étude énergétique du rayonnement électromagnétique et des transferts d'énergie entre deux objets, l'émetteur (la source ou l'objet) et le récepteur (l'image). Les grandeurs de la photométrie sont soit exprimées en unités purement physique (énergie, temps, surface, longueur etc...) soit en unités prenant en compte la sensibilité de l'œil humain qui ne détecte que des radiations dont la longueur d'onde est comprise entre 400 et 750 nm (pour caractériser des sources lumineuses utilisées pour l'éclairage par exemple).

Comme ces notions sont importantes lors de la conception de systèmes optiques, on en profitera pour en faire un exposé plus complet que le strict nécessaire à ce chapitre sur le rayonnement du corps noir. Par exemple ces notions sont importantes lorsqu'il est important d'utiliser toute l'énergie lumineuse disponible (spectroscopie, microscopie, télécommunications, astronomie, ... ) ou bien si des mesures quantitatives précises sont nécessaires (métrologie, applications industrielles, etc... ). Dans ce qui suit on considérera une onde monochromatique, la généralisation au cas d'un rayonnement polychromatique est immédiate. Par exemple :

$$\text{Intensité} \quad I \propto [W][T]^{-1} \text{ (Js}^{-1}\text{) (W désigne un travail)}$$

devient :

$$\text{Densité spectrale d'intensité } I_{\lambda}(\lambda) = \frac{dI}{d\lambda} \propto [W][T]^{-1}[L]^{-1} \text{ (Js}^{-1}\mu\text{m}^{-1}\text{) ou } I_{\nu}(\nu) = \frac{dI}{d\nu} \propto [W] \text{ (J)}$$

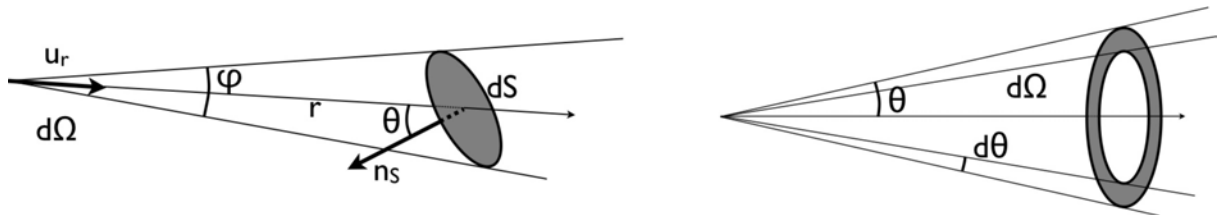
On s'intéressera soit à des transferts de quantité d'énergie ou à des transferts de quantité d'énergie par unité de temps (puissance).

### 3.3.1 Grandeurs photométriques.

#### Angle solide (rappel)

L'angle solide élémentaire sous lequel est vu un élément de surface  $d\vec{S} = dS\vec{n}_s$ , vu depuis  $\vec{r} = r\vec{u}_r$  est :

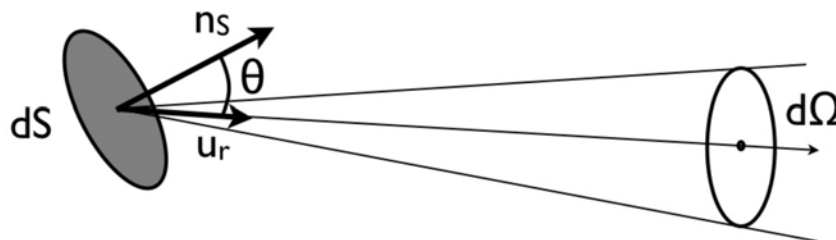
$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{u}_r}{r^2} = \frac{dS \cos\theta}{r^2}$$



- Lorsque l'élément de surface est vu depuis une direction perpendiculaire à sa surface alors  $d\Omega = \frac{dS}{r^2}$
- S'il y a une symétrie de révolution,  $d\Omega = 2\pi \sin\alpha d\alpha$ , et l'angle solide défini par une calotte de demi-angle  $\theta$  est  $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$ .
- Si l'angle apparent,  $\varphi$ , sous lequel est vue la surface est petit,  $\Omega = \pi\theta^2 = \frac{1}{4}\pi\varphi^2$
- L'angle solide définissant tout l'espace vaut  $4\pi$ . Ainsi l'angle solide est un nombre sans dimension dénommé stéradian (sr), souvent employé abusivement comme une unité pour plus de clarté.

#### Flux lumineux

Le flux lumineux émis par une source de surface  $d\vec{S}$ , dans l'angle solide  $d\Omega$  dans la direction  $\vec{u}_r$  est proportionnel à  $d\Omega$  et à  $d\vec{S} \cdot \vec{u}_r$  ( $\approx$  surface apparente de  $dS$  vue dans la direction  $\vec{u}_r$ ). Le coefficient de proportionnalité, noté  $L$ , est la *luminance* de la source.



$$d\Phi = L d\vec{S} \cdot \vec{u}_r d\Omega = L \cos\theta dS d\Omega \quad \text{Flux lumineux} \propto [W][T]^{-1} (\text{Js}^{-1})$$

A priori  $L$  dépend de l'angle sous lequel on observe la source. Si  $L$  est constante on parle de source *Lambertienne*. La luminance a les dimensions d'une puissance par unité de surface (par stéradian).

$$L \quad \text{Luminance} \propto [W] [T]^{-1} [L]^{-2} \text{ (J s}^{-1} \text{m}^{-2}\text{)}$$

### Intensité de la source lumineuse

L'intensité est le flux rayonné par unité d'angle solide et intégré sur toute la surface :

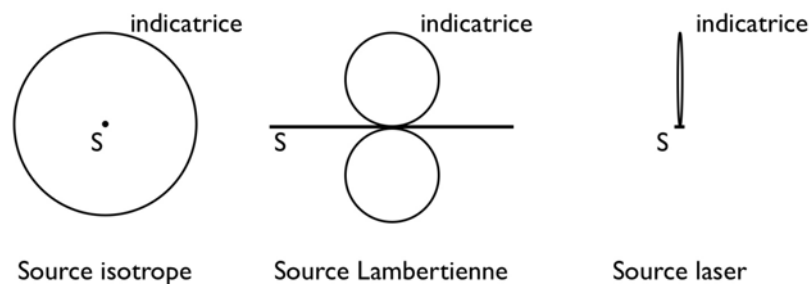
$$I = \int_s \frac{d\Phi}{d\Omega} = \int L \cos \theta dS \quad \text{Intensité} \propto [W] [T]^{-1} \text{ (J s}^{-1}\text{)}$$

La dimension est une puissance (par stéradian). La courbe qui donne l'intensité en fonction de l'angle  $I(\theta)$ , s'appelle *l'indicatrice*.

C'est un cercle centré sur l'origine pour une source isotrope (une étoile) et  $I_{totale} = 4\pi I$

C'est un cercle passant par l'origine pour une source Lambertienne (un diffuseur plan idéal) :  $I_L(\theta) = \int L \cos \theta dS = \cos \theta \int L dS = I_0 \cos \theta$

C'est une fonction très directive pour un laser par exemple.



### Exitance ou émittance de la source lumineuse

L'exitance est le flux rayonné par unité de surface et intégré sur toute l'angle solide :

$$M = \int_{\Omega} \frac{d\Phi}{dS} = \int L \cos \theta d\Omega \quad \text{Exitance} \propto [W] [T]^{-1} [L]^{-2} \text{ (J s}^{-1} \text{m}^{-2}\text{)}$$

La dimension est une puissance par unité de surface. Pour une source Lambertienne :

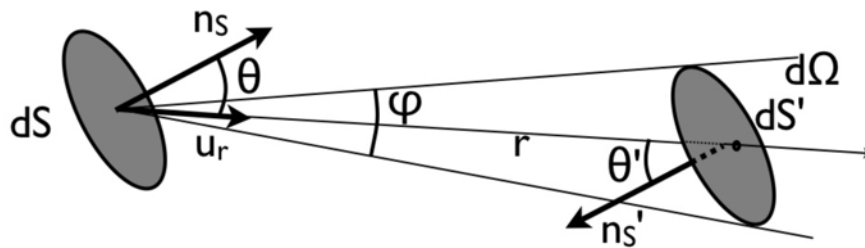
$$M_L = \int L_L \cos \theta d\Omega = L_L \int_0^{\pi/2} 2\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi L_L$$



## Irradiance d'un objet

Ce sont les mêmes considérations que précédemment mais pour la réception. Soit  $d\vec{S}' = dS' \vec{n}_s'$  l'élément de surface définissant le récepteur.

$$d\Omega = \frac{d\vec{S}' \cdot \vec{u}_r}{r^2} = \frac{dS' \cos \theta'}{r^2}$$



L'éclairement ou l'irradiance de la surface  $dS'$  par l'élément de source  $dS$  est alors donnée par :

$$\frac{d\Phi}{dS'} = L \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r^2} dS$$

et l'irradiance totale s'exprime en unité de puissance par unité de surface et vaut :

$$E = \int_s L \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r^2} dS \quad \text{Irradiance} \propto [\text{W}] [\text{T}]^{-1} [\text{L}]^{-2} (\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2})$$

Lorsque la source est petite,  $r$  et  $\theta'$  peuvent être sortis de l'intégrale :

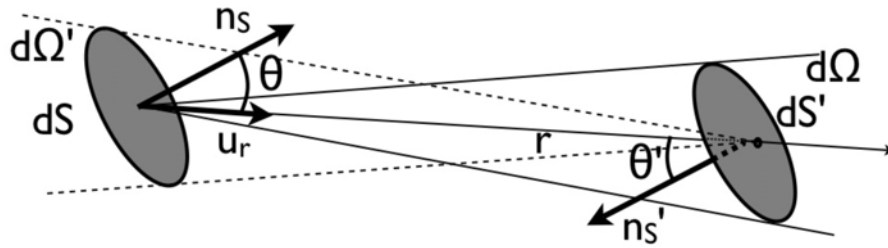
$$E = \frac{\cos \theta'}{r^2} \int_s L \cos \theta dS = I(\theta) \frac{\cos \theta'}{r^2}$$

Conformément au sens commun, l'éclairement décroît comme le carré de la distance à la source et comme le cosinus de l'angle entre la normale au détecteur et la direction de la source (si les surfaces du détecteur et de la source sont parallèles, l'éclairement est maximum, il est nul si le récepteur est illuminé de profil).

## Etendue géométrique d'un faisceau

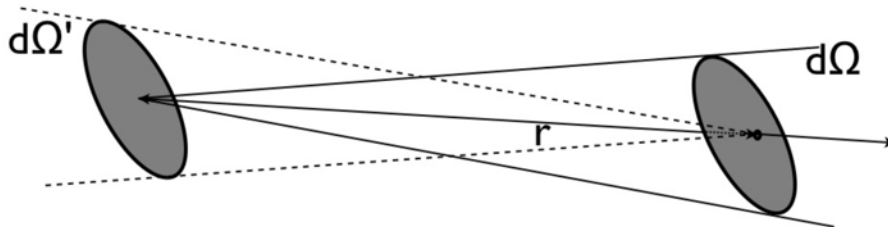
L'élément de flux lumineux entre les surfaces  $d\vec{S}$  et  $d\vec{S}'$  distantes de  $r$  peut se mettre sous la forme du produit d'une quantité décrivant les propriétés de la source, la luminance  $L$  et un facteur purement géométrique où les deux surfaces jouent un rôle symétrique :

$$d\Phi = L \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r^2} dS dS' = L \frac{d\vec{S} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \frac{d\vec{S}' \cdot \vec{u}_r}{r^2} = L r^2 d\Omega d\Omega' = L dU$$



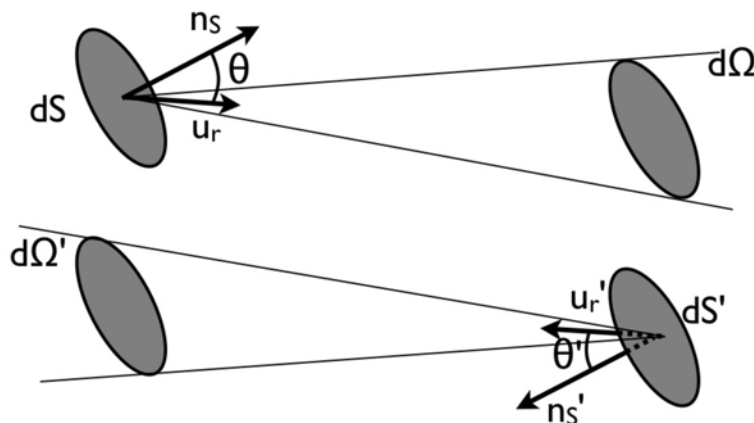
la quantité élémentaire  $U$  s'appelle l'étendue géométrique, selon les cas particuliers il est utile de l'écrire sous une forme où l'émetteur et le récepteur ont des rôles symétriques :

$$dU = \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r^2} dS dS' = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \frac{d\vec{S}' \cdot \vec{u}_r}{r^2} = r^2 d\Omega d\Omega' \quad \text{Etendue géométrique élémentaire}$$



ou, plus fréquemment, en privilégiant l'un des deux :

$$\begin{aligned} dU &= dS \cos\theta d\Omega = d\vec{S} \cdot \vec{u}_r d\Omega \\ &= dS' \cos\theta' d\Omega' = d\vec{S}' \cdot \vec{u}_r d\Omega' \end{aligned} \quad \text{Etendue géométrique élémentaire}$$



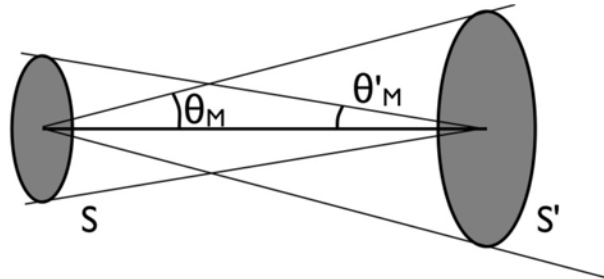
*Etendues géométriques élémentaires vues de  $S$  et vues de  $S'$ .*

Pour obtenir ensuite l'étendue géométrique entre deux surfaces qui se voient sous un certain angle solide, il faut sommer les contributions élémentaires :

$$U = \int_{\Omega} \int_{\Omega'} dU = \int_{\Omega} \int_S dU = \int_{\Omega'} \int_{S'} dU$$

Le calcul peut être plus ou moins ardu et, selon les cas, on privilégiera une des expressions. Dans le cas très fréquent où les surfaces ont une symétrie de révolution et sont perpendiculaires à l'axe optique, un calcul élémentaire conduit à :

$$U = \iint dS \cos \theta d\Omega = \int_S \int_0^{\theta_M} dS \cos \theta 2\pi \sin \theta d\theta = \pi S \sin^2 \theta_M = \pi S' \sin^2 \theta'_M$$

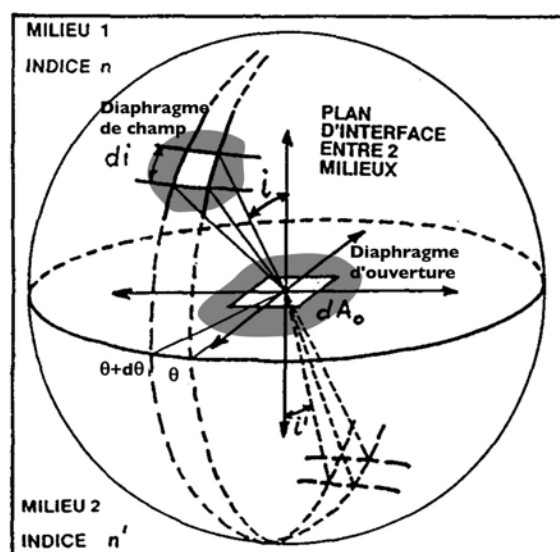


*Etendue géométrique.*

L'utilité de la notion d'étendue d'un faisceau vient du fait qu'une quantité très voisine : l'étendue optique, définie par le produit de l'étendue géométrique par le carré de l'indice du milieu ( $n^2U$ ), se conserve dans un système optique. Soit un dioptre séparant deux milieux d'indice  $n$  et  $n'$  sur lequel un faisceau lumineux d'étendue géométrique  $dU$  est incident et subit une réfraction. Pour calculer l'étendue géométrique du faisceau après réfraction, on considère que l'étendue du faisceau incident est déterminée par un petit diaphragme d'aire  $dA$  posé sur le dioptre (ce diaphragme est usuellement appelé diaphragme d'ouverture) et un second diaphragme, dit diaphragme de champ, perpendiculaire au faisceau et vu depuis  $dA$  sous les angles en coordonnées sphériques  $i$  et  $i+di$  pour l'incidence et  $\theta+d\theta$  pour la latitude. L'angle solide sous lequel apparaît le diaphragme de champ depuis le diaphragme d'ouverture est :

$$d\Omega = \sin i di d\theta$$

(Rappel : L'élément de surface en coordonnées sphériques s'écrit  $dS = r^2 \sin i di d\theta$ ).



*Diaphragme de champ et diaphragme d'ouverture.*

L'étendue géométrique dans le milieu incident s'écrit alors :

$$dU = dA \cos i d\Omega = \sin i \cos i di d\theta dA$$

et de la même manière l'étendue dans le second milieu va s'écrire :

$$dU' = \sin i' \cos i' di' d\theta' dA$$

En utilisant les lois de Ibn Sahl (c. 984) (plus connues sous le nom de lois de Snell-Descartes, c. 1631) les relations entre les angles dans les milieux incident et transmis sont :

$$\begin{aligned} n \sin i &= n' \sin i' \\ n \cos i &= n' \cos i' \\ \theta &= \theta' \end{aligned}$$

ce qui implique la relation :

$$n^2 dU = n'^2 dU' \quad \text{Conservation de l'étendue optique}$$

Rappel : par définition l'ouverture numérique d'un faisceau optique ou d'un système optique est  $NA = n \cdot \sin \theta$ , où  $\theta$  est l'angle d'incidence maximum des rayons lumineux.

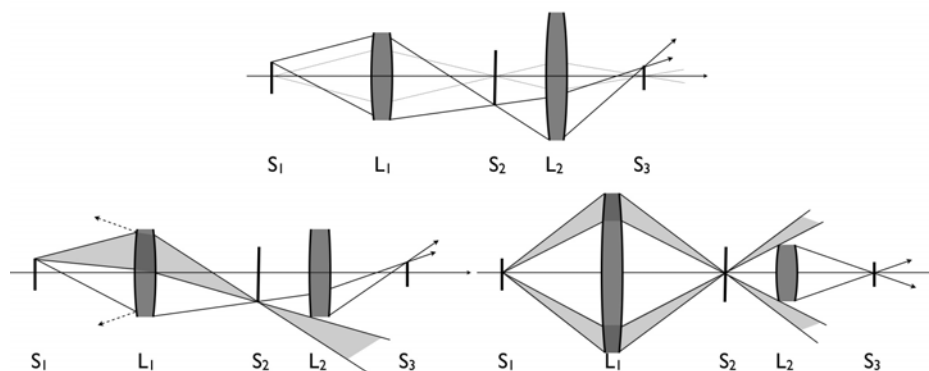
Si  $T$  est le coefficient de transmission du dioptré, le flux lumineux dans le deuxième milieu s'écrit  $d\Phi' = T d\Phi$  et si  $L$  et  $L'$  sont les luminances du faisceau dans les deux milieux :

$$L' dU' = T L dU$$

Il en découle :

$$\frac{L'}{n'^2} = T \frac{L}{n^2}$$

Note 1: L'étendue optique se conserve ou ne peut que se dégrader en traversant un système optique, soit parce que la transmission des éléments optiques n'est pas unité, soit parce que le système optique est mal conçu et une partie du faisceau émergent est perdue.



*Systèmes optiques optimisés et non optimum.*

Note 2: Si les deux milieux initiaux et finaux sont identiques (par exemple après avoir traversé un ensemble de lentilles)  $L'=TL$ .

Note 3: Pour un miroir de coefficient de réflexion  $R$ ,  $L'=RL$ .

Note 4: Pour les systèmes d'imagerie dits aplanétiques c'est-à-dire stigmatiques approchés (un point source donne un point image) et ce pour des points appartenant à des plans conjugués perpendiculaires à l'axe optique, la conservation de l'étendue est identique à la loi des sinus d'Abbe. Pour un objet circulaire de rayon  $y$  l'étendue optique vaut  $n^2\pi^2y^2\sin^2\theta$  et :

$$n^2\pi^2y^2\sin^2\theta = n'^2\pi^2y'^2\sin^2\theta'$$

$$\Rightarrow$$

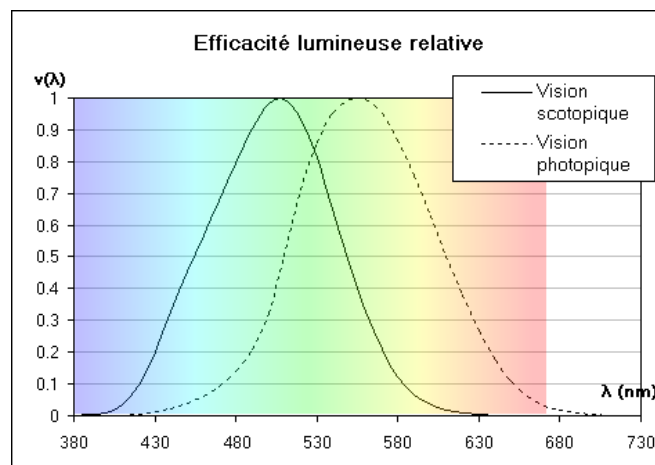
$$n.y.\sin\theta = n'.y'.\sin\theta' \quad \text{Loi des sinus d'Abbe}$$

### 3.3.2 Grandeurs photométriques visuelles.

Le principe consiste à normaliser ces mêmes quantités selon la sensibilité optique de l'œil. Il faut encore distinguer la vision diurne sensible aux couleurs (vision photopique) qui se fait par l'intermédiaire des cônes de la rétine et la vision nocturne (vision scotopique) en niveaux de gris qui se fait par l'intermédiaire des bâtonnets de la rétine. L'*efficacité lumineuse spectrale* est une fonction établie pour un observateur moyen, défini par la Commission Internationale de l'Éclairage (CIE). Par définition pour un rayonnement monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  le flux énergétique  $\Phi_\lambda$ , et le flux visuel correspondant  $F_\lambda$ , sont reliés par la relation :

$$F_\lambda = \frac{V_\lambda}{\Lambda} \Phi_\lambda \quad \text{Flux visuel}$$

$\Lambda$ , est une valeur numérique qui vaut 0,00146 W/lm. Son inverse  $1/\Lambda$ , vaut 680 lm/W.  $V_\lambda$ , est l'efficacité lumineuse spectrale. Les unités pour chacune des quantités photométriques introduites plus haut sont résumées dans le tableau :



Réponse optique de l'œil humain.

Photométrie		Photométrie visuelle	
Grandeur	Unité (SI)	Grandeur	Unité (CIE)
Flux, $\Phi$	W	Flux visuel	Lumen (lm)
Intensité, I	W ou W/sr	Intensité lumineuse ou visuelle	Candela (cd)
Luminance (Radiance en anglais), L	$\text{Wm}^{-2}$ ou $\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}$	Luminance visuelle	$\text{cd.m}^{-2}$
Exitance ou Emittance, M	$\text{Wm}^{-2}$	Exitance ou Emittance lumineuse ou visuelle	$\text{lm.m}^{-2}$
Irradiance ou éclairage, E	$\text{Wm}^{-2}$	Illuminance	lux ( $\text{lm.m}^{-2}$ )

Note 1 : Il existe de nombreuses autres unités, malheureusement encore souvent utilisées.

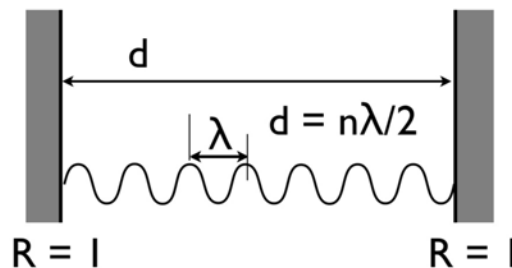
Note 2 : Le terme brillance (brightness) n'est plus utilisé car il était d'un usage imprécis.

Note 3 : Ces quantités peuvent aussi être déclinées dans la version photonique où l'énergie est comptabilisée sous forme de nombre de quantum d'énergie lumineuse et les Watts sont remplacés par des Hertz (nombre de photons par seconde).

### 3.4 Densité d'états de modes électromagnétiques

Cherchons les ondes électromagnétiques qui sont solution des équations de Maxwell dans cette enceinte. Pour simplifier on prendra des parois métalliques parfaites ( $R = 1$ ). Le milieu intérieur est le vide et les solutions peuvent être décrites sous forme d'onde plane  $Ae^{i(kr-\omega t)}$ , avec des conditions supplémentaires imposées par la présence des parois de l'enceinte. Les relations de continuité (voir cours d'électromagnétisme) imposent que le champ électrique soit normal à la surface de la paroi métallique. Soit  $E_{\parallel}(r = \text{bord}) = 0$ .

On a déjà vu dans le cours Optique I le cas d'un résonateur à une dimension (cavité Fabry-Perot) constitué de deux miroirs plans parallèles distants de  $d$ . Pour simplifier on traitera le cas d'un champ scalaire  $u(r,t)$ .



Résonateur à une dimension.

On cherche les solutions de l'équation de Helmholtz

$$\nabla^2 U(r) + k^2 U(r) = 0 \text{ avec } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} \text{ et } u(r,t) = U(r)e^{i\omega t}$$

Les solutions sont des combinaisons linéaires

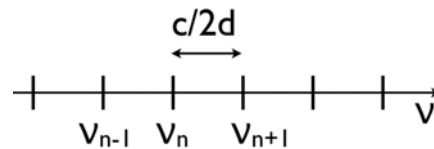
$$U(r) = \alpha e^{ikr} + \beta e^{-ikr} \text{ avec les conditions au bord } U(0) = U(d) = 0$$

$U(0) = 0$  implique une forme en  $U(r) = A_k \sin kr$  ( $\alpha + \beta = 0$ ) et  $U(d) = 0$  quantifie  $k$  en valeurs discrètes.

$$\sin kd = 0 \Rightarrow kd = n\pi$$

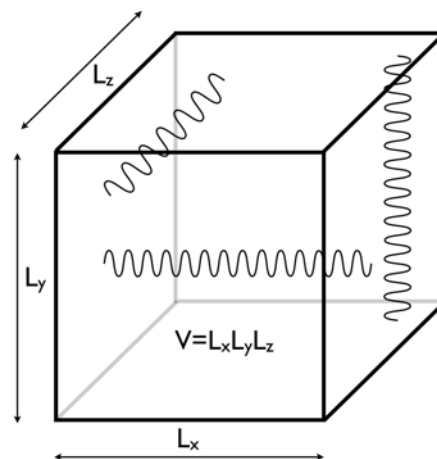
$$k_n = \frac{n\pi}{d} \quad \text{soit } \nu_n = \frac{nc}{2d}$$

Les modes permis sont régulièrement espacés en énergie



*Spectre des fréquences propres.*

De la même manière dans une cavité parallélépipédique à trois dimensions l'équation de Helmholtz se sépare sur les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  et les modes propres solutions de fréquence  $\nu$  s'écrivent comme le produit de fonction sin sur les trois directions de l'espace.



*Résonateur à trois dimensions.*

$$U(r) = \left(\frac{2}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) = \left(\frac{2}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \sin\left(n_x \frac{\pi}{L_x} x\right) \sin\left(n_y \frac{\pi}{L_y} y\right) \sin\left(n_z \frac{\pi}{L_z} z\right)$$

Note : le préfacteur est là pour normé la fonction à 1

avec :

$$k_x = n_x \frac{\pi}{L_x}$$

$$k_y = n_y \frac{\pi}{L_y}$$

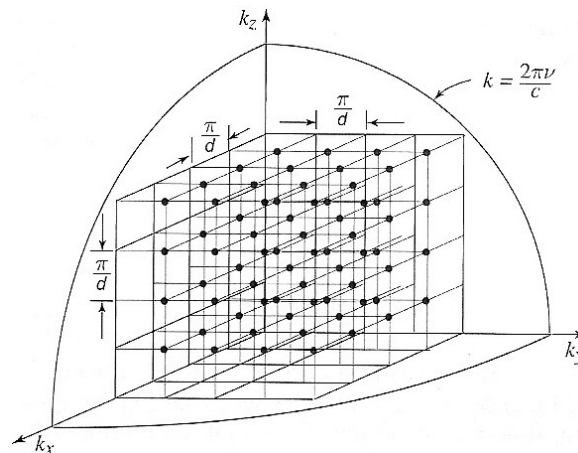
$$k_z = n_z \frac{\pi}{L_z}$$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

et

$$\|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} \quad \nu_{n_x, n_y, n_z} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}}$$

Dans l'espace des  $k$ , les solutions sont régulièrement réparties sur un treillis de période  $\pi/L_{x,y,z}$ . La sphère de rayon  $k$  représente les solutions de fréquence  $k = \frac{2\pi\nu}{c}$



Modes propres dans l'espace réciproque  $k_x, k_y, k_z$ .

Comme l'enceinte est grande les énergies des modes sont très proches les unes des autres et il est intéressant de passer à un continuum en faisant tendre la taille de la boîte vers l'infini. Dans ce cas, la quantité importante est la densité de modes électromagnétique, aussi appelée la densité d'états. C'est le nombre de modes permis  $dN$  par unité de volume  $V$  et dans une bande de fréquence  $d\nu$ .

$$\rho(\nu) = \frac{1}{V} \frac{dN(\nu)}{d\nu}$$

Chaque état occupe un volume =  $d^3\varpi = \frac{\pi^3}{L_x L_y L_z} = \frac{\pi^3}{V}$  dans l'espace des  $k$ .

Lorsque la sphère passe d'un rayon  $k$  à  $k+dk$  le volume de la sphère s'accroît de

$$d^3V = \frac{1}{8} d\left(\frac{4}{3}\pi k^3\right) = \frac{\pi}{2} k^2 dk \quad (1/8 \text{ car il n'y a que les valeurs } k_i \text{ positives})$$

le nombre  $dN$  d'états par unité de volume dans l'enveloppe d'épaisseur  $dk$  et de rayon  $k$  est donc



$$dN = 2 \times \frac{1}{V} \times \frac{\pi k^2 dk}{\pi^3} \\ = \frac{k^2}{\pi^2} dk$$

Note : Le facteur 2 vient des deux états de polarisation dont on n'a pas tenu compte jusqu'à présent.

Comme  $k = \frac{2\pi\nu}{c}$ ,  $dk = \frac{2\pi}{c} d\nu$  on en déduit la densité d'états :

$$\rho_{3D}(\nu) = \frac{1}{V} \frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \frac{2\pi}{c} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

$$\rho_{3D}(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad \text{Densité d'états des modes électromagnétiques dans le vide}$$

En d'autres termes c'est la dégénérescence en k des modes à la fréquence  $\nu$ .

*Exercice* : Montrer que dans un milieu dispersif d'indice de réfraction n la densité d'état s'écrit :  $\rho_{3D}(\nu) = \frac{8\pi\nu^2 n^2 n_g}{c^3}$  où  $n_g$  est l'indice de groupe,  $n_g = c \frac{dk}{d\omega} = \frac{c}{2\pi} \frac{dk}{d\nu} = n \left( 1 + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu} \right)$ .

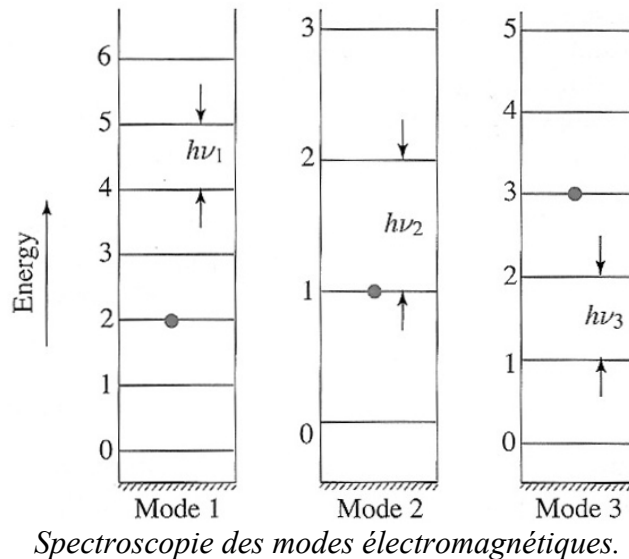
## 3.5 Rayonnement électromagnétique du corps noir.

### 3.5.1 Densité spectrale d'énergie électromagnétique du corps noir.

Au XIX<sup>ème</sup> les physiciens essayent d'appliquer la toute nouvelle et controversée physique statistique de Boltzmann à la distribution de modes électromagnétiques du corps noir en leur attribuant une énergie thermique  $k_B T$  ( $k_B$  constante de Boltzmann). C'est un échec qui prédit des spectres d'émission qui divergent quand la longueur d'onde tend vers 0 (loi de Rayleigh-Jeans).

L'hypothèse fondatrice que fait Planck, qui initialement n'est pour lui qu'un artifice de calcul, mais qui conduira à la notion de photon est de supposer que :

- 1 Chaque mode électromagnétique dans le corps noir ne peut contenir de l'énergie que par quanta d'énergie  $\mathcal{E}$ ,  $E_{\nu,n} = n\mathcal{E}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2 La valeur de ce quanta est proportionnelle à la fréquence  $\mathcal{E} = h\nu$ , où h est la constante de Planck.  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J.s.



C'est à ce système-là que Planck applique les lois de la physique statistique. A l'équilibre l'occupation des niveaux d'énergie  $E_{v,n}$  est donné par une loi de distribution de Boltzmann. Pour une fréquence  $\nu$  donnée, le rapport des populations des niveaux I et II, d'énergie  $E_I$  et  $E_{II}$  satisfait :

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{\text{probabilité d'occupation du niveau II}}{\text{probabilité d'occupation du niveau I}} = \frac{p(II)}{p(I)} = e^{-\frac{E_{II}-E_I}{k_B T}}$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K. (Ordre de grandeur à retenir  $k_B T = 1/40$  eV = 25 meV à  $T = 300$  K)

si l'état I est l'état  $n=0$  et l'état II le niveau  $E_n$ , on obtient :

$$p(E_n) = p(n) \propto e^{-\frac{E_n - E_0}{k_B T}}$$

et la statistique de population à la fréquence  $\nu$  est donc telle que :

$$p(n) \propto e^{-\frac{E_n - E_0}{k_B T}} \propto e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}} \propto \left( e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \right)^n$$

$p(n)$  décrit la probabilité de population entre les niveaux  $n$  du mode de fréquence  $\nu$ , elle est normée à 1:  $\sum_{n=0}^{n=+\infty} p(n) = 1$

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} \left( e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}}$$

d'où:

$$p(n) = \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}\right) e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}}$$

et la valeur moyenne de  $n$  :

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} np(n) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

(à faire en exercice, indication considérer la dérivée de  $f(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} x^n$ )

L'énergie moyenne portée par le mode de fréquence  $\nu$  est donc  $\bar{E} = h\nu\bar{n}$  et la densité d'énergie par unité de fréquence et de volume est :

$$\rho_{em}(\nu) = \rho_{3D}(\nu)\bar{E} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad \text{Loi de Planck}$$

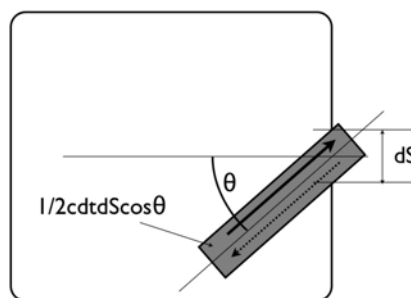
### 3.5.2 Rayonnement du corps noir.

Il reste à calculer l'énergie rayonnée,  $dW$ , pendant  $dt$  par un petit trou de surface  $dS$ , c'est-à-dire son émittance  $M(T) = \frac{dW}{dSdt}$ , ou plutôt la densité spectrale d'émittance par unité de fréquence ou de longueur d'onde :

$$M_\lambda(T) = \frac{dW}{dSdt d\lambda} \quad \text{ou} \quad M_\nu(T) = \frac{dW}{dSdt d\nu}$$

Cette énergie est égale à l'irradiance (l'éclairement) du trou par le champ dans l'enceinte. On suppose que le rayonnement est isotrope (parce qu'il est indépendant des caractéristiques de l'enceinte) sa densité par angle solide est donc :  $\frac{1}{4\pi/2} = \frac{1}{2\pi}$ . L'énergie incidente pour un mode

faisant un angle  $\theta$  avec la normale à  $dS$  est celle occupée par le volume  $\frac{1}{2}c dt dS \cos\theta$ . Le facteur  $\frac{1}{2}$  vient du fait que dans les ondes stationnaires formant le mode (ondes incidentes et réfléchies), on ne compte que les ondes incidentes sur  $dS$ .



*Emission d'un corps noir.*

Et finalement il est raisonnable de penser que l'élément de surface rayonne comme un diffuseur parfait, c'est à dire comme une source Lambertienne,  $M = \pi L$ .

$$\begin{aligned} M_\nu(T) &= \frac{dW}{dS dt d\nu} = \frac{c}{2} \rho_{em}(\nu) \int_0^{\pi/2} \cos\theta \frac{d\Omega}{2\pi} \\ &= \frac{c}{2} \rho_{em}(\nu) \int_0^{\pi/2} \cos\theta \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{2\pi} = \frac{c}{4} \rho_{em}(\nu) \end{aligned}$$

que l'on exprime soit en fonction de  $\nu$  ou de  $\lambda$  ( $\nu = \frac{c}{\lambda}$  et  $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$ ) :

$$M_\nu(T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad M_\lambda(T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \quad \text{Emittance spectrale du corps noir}$$

Ce qui permet de retrouver immédiatement les lois de Stefan-Boltzmann ainsi qu'une expression pour la constante de Stefan :

$$\begin{aligned} M(T) &= \int_0^\infty \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4 \quad \text{Loi de Stefan-Boltzmann} \\ \sigma &= \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1} \end{aligned}$$

(En utilisant :  $\int_0^\infty \frac{u^3}{e^u - 1} du = \frac{\pi^4}{15}$ )

ainsi que la loi de déplacement de Wien. En différenciant  $M(T)$ , le maximum est solution de l'équation implicite :

$$e^{-\frac{hc}{\lambda_{\max} k_B T}} = 1 - \frac{hc}{5\lambda_{\max} k_B T}$$

qui a pour solution :

$$\lambda_{\max} (\mu\text{m}) \approx \frac{2898}{T(K)} \quad \text{Loi de déplacement de Wien}$$