OPTIQUE II
Section de Physique
Professeur : R. Houdré
Exercices : M. Tonin

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Série 6
24 mars 2014
Corps noir et photons

Ex 1: Couplage dans une fibre optique

On désire coupler de la lumière blanche provenant d'une lampe à incandescence dans une fibre optique. Il existe une limite thermodynamique à l'intensité que l'on peut coupler dans la fibre qui ne dépend que de l'ouverture numérique de la fibre NA, du diamètre du cœur de la fibre d et de la température du filament de la source incandescente T.

a) On suppose que le diamètre angulaire de la source lumineuse vue depuis la fibre est plus grand que l'angle de l'ouverture numérique de la fibre. Calculer l'étendue optique de la fibre.

b) La source lumineuse est un émetteur Lambertien. En déduire la puissance maximum que l'on peut coupler dans la fibre.

Rappel: $\int_0^\infty \frac{u^3}{e^u - 1} du = \frac{\pi^4}{15}$ et $\int_{2.55}^{3.5} \frac{u^3}{e^u - 1} du = 1.33$

c) Faire l'application numérique pour NA=0.22, d=100μm, T= 5000K et pour une gamme spectrale de 800-1100nm.

Ex 2: Quantification d'un circuit LC excité par une source de tension

a) On considère un circuit LC sans pertes. Soit $e(t)$ la tension excitatrice et q la charge du circuit. Ecrire l'équation classique qui détermine la charge q. On posera $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$ la fréquence de résonance du circuit.

b) En faisant l'analogie avec l'oscillateur harmonique, quelle est la variable conjuguée de q? On la notera p.

c) Soit H le Hamiltonien de ce système. Les équations classiques du mouvement de ce système sont (équations de Hamilton-Jacobi)):

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$
$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Déterminer H.

d) Nous associons des opérateurs hermitiens à q et p. Quelle est la relation qui traduit la quantification?

e) On introduit les opérateurs non-hermitien a et a^+ définit en fonction de q et p, avec:

$$a = (2\hbar\omega_0 L)^{-1/2}[\omega_0 Lq + ip]$$
$$a^+ = (2\hbar\omega_0 L)^{-1/2}[\omega_0 Lq - ip]$$

Ecrire q et p en fonction de a et a^+. En utilisant la question précédente montrer que $[a,a^+] = 1$.

f) Ecrire H en fonction de a et a^+. On posera $f(t) = -\frac{e(t)}{\sqrt{2\hbar\omega_0 L}} = f^*(t)$

g) On charge la capacité avec un tension de 1 volt. A t=0 on court-circuite la source. Calculer l'énergie totale du système en prenant C=1nF. Déterminer la condition à réaliser pour se trouver dans un régime quantique. Que vaut L dans ce cas? Commenter.

La forme trouvée pour H est identique à celle du Hamiltonien de l'oscillateur harmonique forcée. L'opérateur nombre a^+a pour les quanta de l'oscillateur devient l'opérateur nombre de photons dans le circuit LC. a et a^+ sont respectivement les opérateurs annihilation et création de photon du circuit.

Cet exercice a été inspiré du livre de W.H. Louisell "Quantum Statistical Properties of Radiation"

Ex 3: Effet Compton: Diffusion de rayons X sur des électrons au repos

Lorsqu'un photon de fréquence ν entre en collision (élastique) avec un électron au repos, un photon de fréquence ν' est émis avec un angle θ et l'électron acquiert une impulsion $\vec{P}_e$ avec un angle φ (voir schéma du cours).

a) Rappelez comment s'écrit l'énergie et la quantité de mouvement d'un photon en fonction de la fréquence optique ν. On notera m_0 la masse au repos de l'électron.

b) En utilisant les lois de la mécanique classique (conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement) écrivez trois équations reliant ν, ν', θ et φ. (On supposera que la vitesse de l'électron est négligeable devant celle de la lumière)

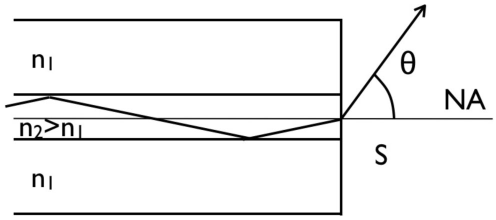
c) Montrez qu'à la limite où la différence de fréquence δν << ν, ces équations permettent d'exprimer la fréquence optique du photon diffusé ν' en fonction de la fréquence optique du photon incident ν, et de l'angle de diffusion θ sous la forme

$$\nu' - \nu \approx \nu^2 \frac{h}{m_0 c^2}(1-\cos\theta) \qquad \text{i.e. } \lambda - \lambda' \approx \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

On éclaire un gaz d'électrons avec des rayons X de 0.1nm de longueur d'onde. Quelle est la vitesse maximale que peut acquérir un électron par effet Compton ?

Correction

Ex 1: Couplage dans une fibre optique



Ouverture numérique et étendue optique en sortie d'une fibre optique.

a) Le couplage n'est possible que pour les photons se propageant à l'intérieur le cône d'acceptance de la fibre qui est défini par son ouverture numérique $NA = n\sin(\theta)$ avec n=1.
Ainsi, le couplage dans la fibre ne sera possible que si l'intensité du corps noir est émise dans la même étendue optique que l'étendue optique de la fibre qui vaut:

$$U_{fibre} = \pi S_{fibre}\sin^2\theta = \Omega_{fibre} = \frac{\pi^2 d^2}{2}NA^2$$

b) L'intensité maximum vaut:

$$P_{\max} = \int L dU = U_{fibre}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_\lambda(T)$$

Comme la source émet comme un corps noir qui est un émetteur Lambertien :

$$L = \frac{M}{\pi} = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

Alors on peut écrire $P_{\max} = U_{fibre}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1}d\lambda$

En faisant apparaitre la constante de Stefan σ , et en changeant de variable, on peut réécrire:

$$P_{\max} = U_{fibre}\frac{\sigma T^4}{\pi}\frac{\int_{u_1}^{u_2}\frac{u^3}{e^u-1}du}{\int_0^{\infty}\frac{u^3}{e^u-1}du} = \frac{15}{2\pi^3}\sigma d^2 NA^2 T^4\int_{u_1}^{u_2}\frac{u^3}{e^u-1}du$$

avec $u = \frac{hc}{\lambda k_B T}$

c) On trouve en calculant numériquement l'intégrale : $\int_{2.55}^{3.5}\frac{x^3}{e^x-1}dx = 1.33$.

$P_{\max}$ = 565 μW.

Ex 2: Quantification d'un circuit LC excité par une source de tension

a) La tension au bornes de la bobine vaut $V_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$ avec i le courant et la tension aux bornes de la capacité vaut $V_C = \frac{1}{C}q$.

Comme $V_L + V_C = e(t)$, on en déduit:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = \frac{1}{L}e(t)$$

b) On a $i = \frac{dq}{dt}$. En faisant l'analogie avec l'oscillateur harmonique on voit que L joue le rôle de la masse. Il est donc naturel de choisir $p = Li$ comme variable conjuguée de q. On a alors $L\frac{dq}{dt} = p(t)$.

c) Avec la question précédente on a déjà $L\frac{dq}{dt} = p(t)$. Par ailleurs, en utilisant la question a) on peut écrire: $\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{C}q + e(t)$.

A partir de $\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{L}p(t)$ on intègre une première fois par rapport à q, ce qui donne $H(t) = \frac{1}{2L}p^2 + g(q)$. On détermine la fonction $g(q)$ à partir de $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{1}{C}q + e(t)$

d'où: $H(t) = \frac{1}{2L}p^2 + \frac{1}{2C}q^2 - e(t)q$.

d) La relation qui traduit la quantification est $[q,p] = i\hbar$

e) Il est immédiat que:

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0 L}{2}}[a^+ - a] \text{ et } q = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0 C}{2}}[a^+ + a]$$

En utilisant $[q,p] = i\hbar$ on trouve tout aussi immédiatement que $[a,a^+] = 1$.

f) En injectant les expressions de q et p en fonction de a et a^+ dans H obtenu à la question c) on trouve: $H(t) = \hbar\omega_0(a^+a + 1/2) + \hbar[f(t)a + f^*(t)a^+]$

g) L'énergie totale est $E_{total} = \frac{1}{2}C \times 1^2 = \frac{1}{2}10^{-9}\,Joules$

La quantification a lieu quand le quanta d'énergie $\hbar\omega_0$ est de l'ordre de grandeur de l'énergie totale du système, i.e. $\hbar\omega_0 = \hbar\frac{1}{\sqrt{LC}} \approx E_{total}$

ce qui est équivalent à $L \approx \frac{\hbar}{(E_{total})^2 C} \approx 4.10^{-41}\ H$

Pour une bobine infinie (solénoïde) on a $L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 \frac{N}{l} I \times NS}{I} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$

avec, ϕ le flux et N le nombre de spires, l la longueur de la bobine, S la surface d'une spire et $N = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Pour la valeur de L trouvée précédement on obtient $\frac{S}{l} = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{N^2} \times 10^{-34}$.

En prenant $S = \pi \times r^2$ on trouve un facteur de forme $\frac{r}{l} = \left(\frac{1}{\pi} \times \frac{1}{N} \times 10^{-17}\right)$ qui est irréaliste, ce qui montre qu'avec une capacité de 1nF on ne peut pas atteindre le régime quantique. Il en est de même pour une capacité C de 1pF qui donne $\frac{r}{l} = \left(\frac{\sqrt{10}}{\pi} \times \frac{1}{N} \times 10^{-12}\right)$.

Remarque: si on considère un condensateur plan de surface S' et d'épaisseur d, on a $\frac{S'}{d} = \frac{1}{\varepsilon_0}C \approx 10^2$ pour C=1nF et $\frac{S'}{d} = \frac{1}{\varepsilon_0}C \approx 10^{-1}$ pour C=1pf (les valeur de capacité que l'on trouve en générale vont de 1pF à 1µF).

La forme trouvée pour H est identique à celle du Hamiltonien de l'oscillateur harmonique forcée. L'opérateur nombre a^+a pour les quanta de l'oscillateur devient l'opérateur nombre de photons dans le circuit LC. a et a^+ sont respectivement les opérateurs annihilation et création de photon du circuit.

Ex 3 : Effet Compton: diffusion de rayons X sur des électrons au repos

a) Energie d'un photon : $E=h\nu$

Quantité de mouvement d'un photon : $p=h\nu/c$

b) Conservation de l'énergie : $h\nu = h\nu' + \frac{P_e^2}{2m_0}$ (1)

Conservation de la quantité de mouvement : $\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + P_e\cos\phi$ (2)

$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - P_e\sin\phi$ (3)

c) On peut réécrire (2) $P_e\cos\phi = \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\cos\theta$ et (3) $P_e\sin\phi = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta$

En élevant au carré ces deux expressions, en additionnant les deux nouvelles expressions obtenues et en utilisant (1), on obtient :

$$2m_0h(\nu - \nu') = \frac{h^2}{c^2}(\nu^2 - 2\nu\nu'\cos\theta + \nu'^2)$$

qui peut se réécrire :

$$2m_0h = \frac{h^2}{c^2}\left((\nu - \nu') - \frac{2\nu\nu'}{(\nu - \nu')}(1 - \cos\theta)\right)$$

En négligeant δν devant ν, il reste :

$$\nu' - \nu \approx \nu^2 \frac{h}{m_0c^2}(1 - \cos\theta)$$

ou encore en utilisant n=c/l

$$\delta\lambda = \lambda - \lambda' \approx \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

d) D'après l'équation de Compton, l'impulsion maximale est transférée lorsque le photon est rétrodiffusé (q=180°).

Il s'ensuit que la différence de longueur d'onde vaut alors $\delta\lambda_{Max} = \frac{2h}{m_0c}$

L'énergie transférée correspondante s'écrit : $\Delta E_{Max} = h\delta\nu_{Max} = h\frac{\delta\lambda_{Max}}{\lambda^2} = \frac{2h^2}{m_0\lambda^2}$

Et finalement la vitesse maximale est $v_{Max} = \frac{2h}{m_0\lambda}$