

Chapitre 2 : Cohérence

Bibliographie :

Fundamentals of photonics / B.E.A. Saleh et M.C. Tech, en anglais

Optique / J.P. Pérez, en français

Lasers and electro-optics / C.C. Davis, en anglais

Principle of optics / M. Born et E. Wolf, en anglais

Plus avancé :

Optical coherence and quantum optics / L. Mandel et E. Wolf

Electrodynamique et optique quantiques / F. Reuse

Note: certaines des figures du chapitre ont été copiées ou inspirées de ces références.

Une page d'histoire



Thomas Young 1773-1829
Interférence, fentes de Young.



Albert Michelson 1852-1931
Interféromètre de Michelson,
astronomie à synthèse d'ouverture.



Max Born 1882-1970
Coauteur du "Born&Wolf",
fondements de la physique
quantique.



Frits Zernike 1888-1966
Microscope à contraste de phase,
théorème de Van Cittert et
Zernike.



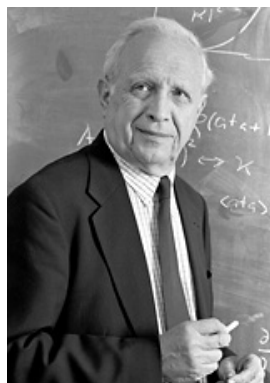
Robert Hanbury Brown
1916-2002
Interférométrie d'intensité,
interféromètre de Hanbury-Brown
et Twiss.



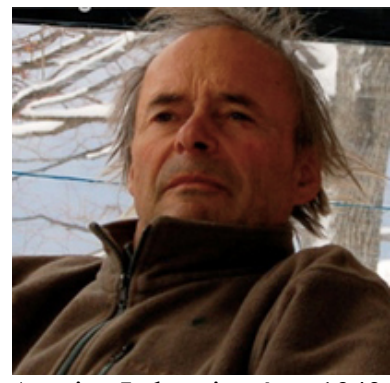
Leonard Mandel 1927-2001
Cohérence optique.



Emil Wolf né en 1922
Théorie de la cohérence optique.



Roy Glauber né en 1925
Théorie de la photodétection,
théorie quantique de la cohérence.



Antoine Labeyrie né en 1943
Astronomie interférentielle,
interférométrie des tavelures,
astronomie à synthèse d'ouverture.

2.1 Introduction.

Quelles sont les questions auxquelles nous allons nous intéresser dans ce chapitre ?
Interférences de deux ondes (suite de optique I).

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= E_1 e^{i\omega_1 t} e^{i\varphi_1} \\ \mathcal{E}_2 &= E_2 e^{i\omega_2 t} e^{i\varphi_2} \\ E_i &\in \Re\end{aligned}$$

$$|\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2|^2 = |\mathcal{E}_1|^2 + |\mathcal{E}_2|^2 + 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2))$$

L'intensité I est proportionnelle à la moyenne temporelle de E^2 . $I \propto \langle |\mathcal{E}|^2 \rangle_t$

a) Si les fréquences sont identiques :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(r))$$

Le terme $\Delta\varphi(r)$ est responsable des figures d'interférences.

b) Si les fréquences sont différentes ou si le terme $\Delta\varphi(r)$ dépend du temps de sorte que toutes les valeurs de la phase sont possibles et équi-réparties. On somme les intensités.

$$I = I_1 + I_2$$

Définition :

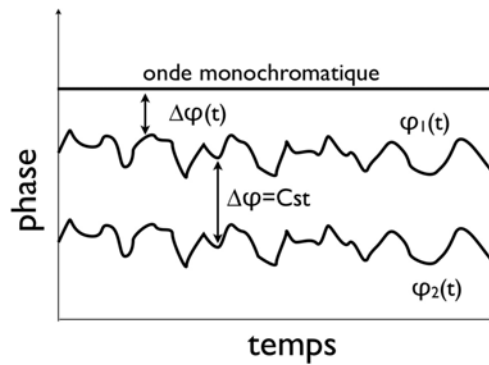
Régime cohérent : La superposition des deux ondes conduit à sommer les *amplitudes*
Régime incohérent : La superposition des deux ondes conduit à sommer les *intensités*

Le but de ce chapitre est d'approfondir ces concepts et de voir comment on passe continûment d'un cas à l'autre. Notamment :

2.1.1 Comment peut-on quantifier cette notion de cohérence ?

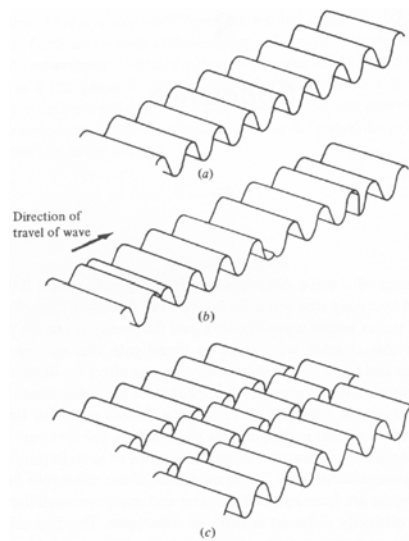
Déjà on voit que dans notre définition avec ce modèle d'interférences, la cohérence est relative entre deux ondes. Les deux phases peuvent très bien fluctuer de pair, de sorte que $\Delta\varphi(r)$ reste constant et que l'on observe des interférences alors que une de ces ondes ne donnera aucune interférence avec une onde monochromatique (voir figure). Il sera mieux de parler de cohérence mutuelle ou de corrélation.

La cohérence d'une onde unique sera comprise dans le sens : dans quelle mesure cette onde peut-elle interférer avec elle-même ? On parlera d'auto-corrélation.



Quelles combinaisons de ces trois ondes donneront lieu à des interférences stationnaires ?

2.1.2 A quoi peut ressembler une onde partiellement cohérente ?

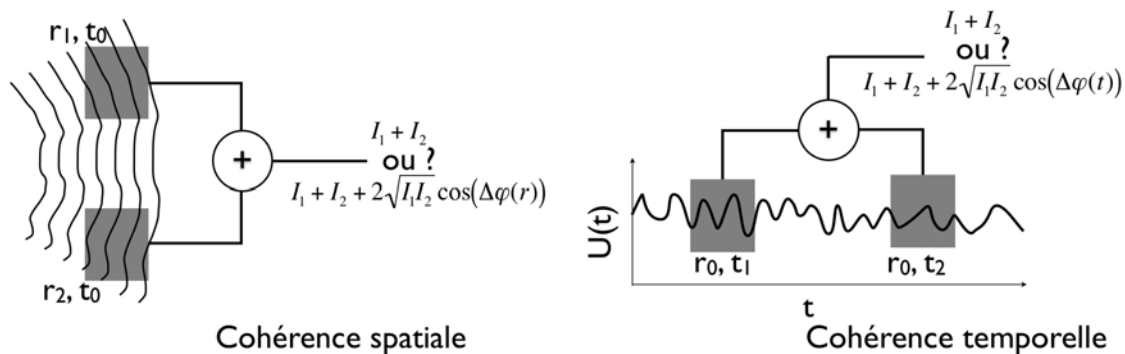


Représentations naïves d'ondes partiellement cohérentes.

Une onde qui est "localement" monochromatique. Localement dans le temps et/ou dans l'espace.

2.1.3 Faire interférer quelle partie de l'onde avec quelle partie ?

Selon que les portions de l'onde sont séparées temporellement ou bien spatialement on parlera de cohérence spatiale ou temporelle.

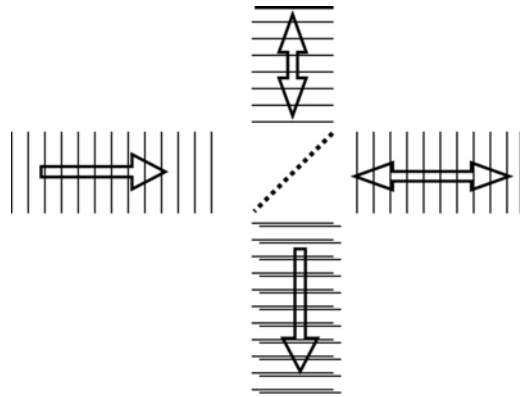


Interférences pour tester les cohérences spatiales et temporelles.

On peut distinguer deux classes d'interféromètres selon la cohérence que l'on veut tester:

a) Interféromètres à division d'amplitude

C'est le cas des interféromètres de Michelson ou de Mach-Zehnder.



Interféromètre de Michelson.

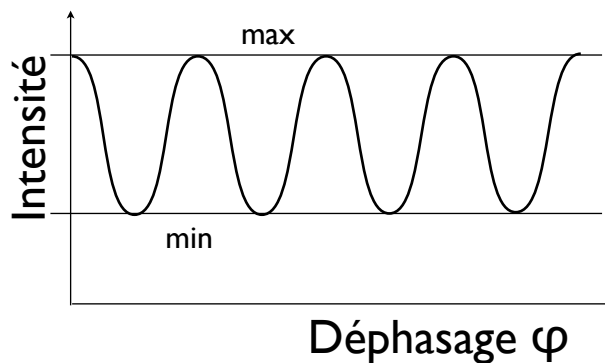
En modifiant la longueur des bras l'un par rapport à l'autre on fait interférer des parties de l'onde plane provenant de la même direction mais séparées *temporellement* entre elles.

L'interférogramme est le graphe de l'intensité en fonction du déphasage (ici la longueur d'un des bras).

Si la fonction passe par 0 les deux ondes ont la même amplitude et sont cohérentes

Si les deux ondes ont la même intensité et l'interférogramme ne passe pas par 0, les deux ondes sont partiellement cohérentes

Si l'interférogramme est constant, les deux ondes sont incohérentes



Interférogramme.

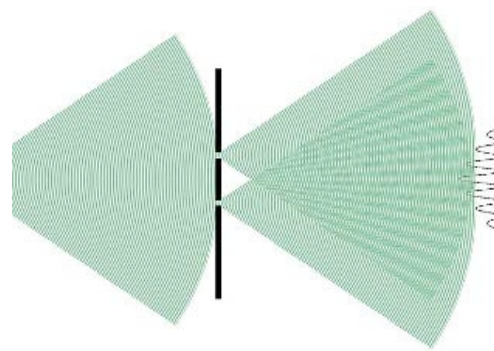
On définit la visibilité des franges par:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

$V = 1$: cohérent, $V = 0$: incohérent

b) Interféromètres à division du front d'onde

C'est le cas d'un interféromètre constitué de fentes de Young.

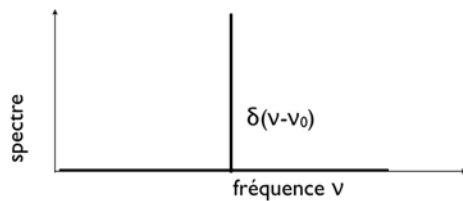


Fentes de Young.

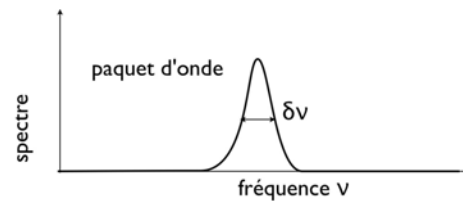
En modifiant la séparation entre les trous de l'interféromètre, on sonde des fronts d'ondes plus ou moins séparés *spatialement*.

2.1.4 Largeur spectrale.

Comment relier ces notions d'ondes partiellement monochromatiques dans le temps ou dans l'espace et la quasi-monochromaticité de l'onde ? C'est-à-dire sa largeur spectrale.



Onde monochromatique



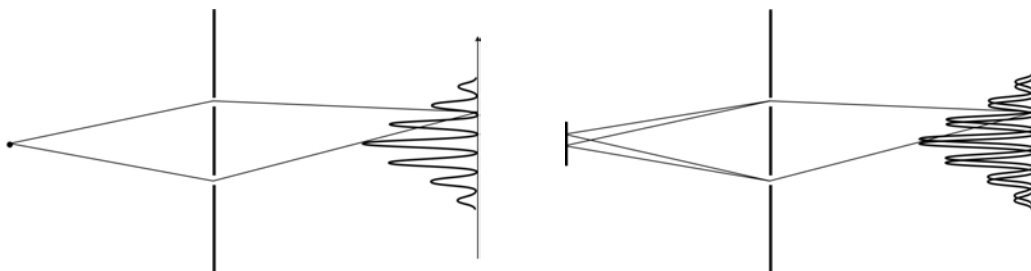
Onde quasi-monochromatique

Spectres d'ondes monochromatique et quasi-monochromatiques.

Peut-on établir un lien entre largeur spectrale $\delta\nu$ du paquet d'onde et la visibilité des franges ?

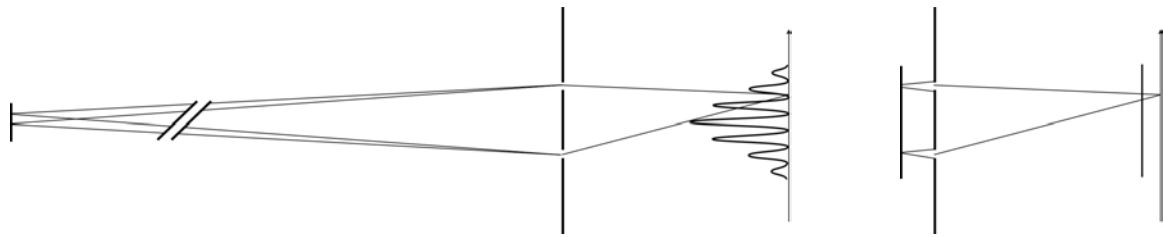
2.1.5 Peut-on généraliser ces notions à des sources étendues ?

Par exemple dans une expérience de fente de Young avec une source ponctuelle cohérente:



Fentes de Young avec une source ponctuelle et une source étendue.

Avec une source étendue. Qu'en est-il de la visibilité des franges d'interférences, Quels sont les paramètres importants ?



Source étendue lointaine, interférences.

Source étendue proche, pas d'interférences.

Différents résultats de fentes de Young avec une même source étendue.

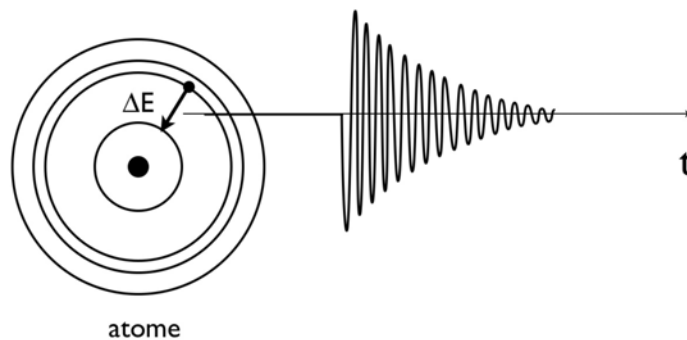
Par exemple une étoile est une source qui apparaît ponctuelle pour nous mais qui est en fait très étendue avec aucune corrélation entre les émissions provenant de différents points à sa surface. Si on fait une expérience de fentes d'Young avec la lumière provenant de cette étoile on observera des franges comme si la source était ponctuelle et cohérente. Si on pouvait rapprocher l'expérience de fentes d'Young à la surface de l'étoile les deux trous verraient des sources complètement décorrélées et les franges disparaîtraient. La cohérence semble être une propriété qui se construit au cours de la propagation. Peut-on être un plus quantitatif ?

2.2 Intensité spectrale, temps de cohérence.

La lumière émise par un ensemble d'émetteurs constitués par exemple d'atomes dans un gaz n'est pas parfaitement monochromatique car les atomes émettent des trains d'impulsions de durée finie et indépendantes les unes des autres.

2.2.1 Elargissement par durée de vie finie

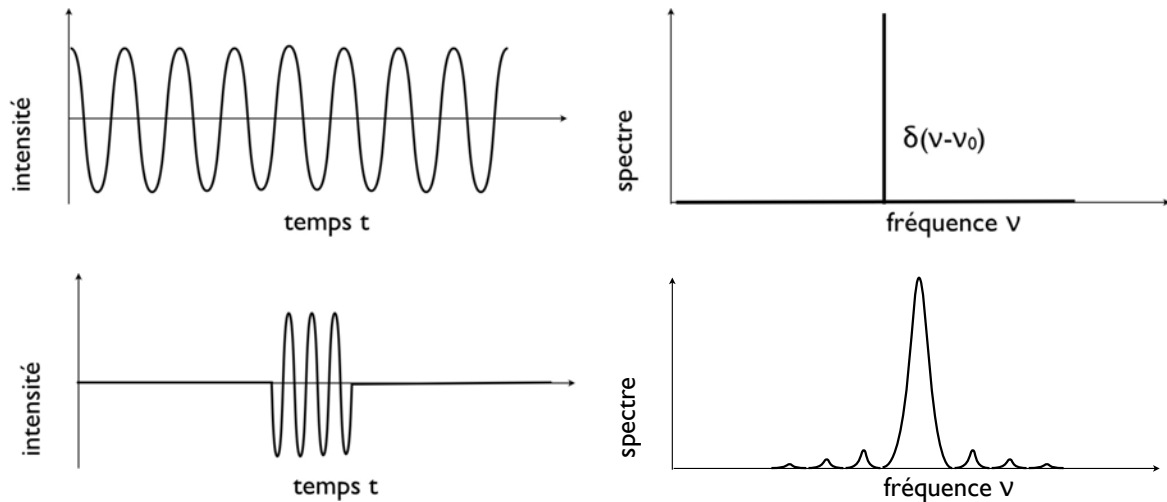
La fréquence de l'onde émise est donnée par $\Delta E = h\nu$, elle a une durée de vie finie par conservation de l'énergie. $\Delta E = \int P_{\text{rayonnée}}(t) dt$.



Formellement cette impulsion de fréquence autour de ν_0 doit être décrite comme un paquet d'onde $I(\nu)$. Comme la période $1/\nu_0$ et la durée de l'impulsion sont très différentes, la largeur spectrale du paquet d'onde $\Delta\nu$ est beaucoup plus petite que ν_0 . $\Delta\nu \ll \nu_0$ et le paquet d'onde est quasi-monochromatique.

$$I(t) = \int I(\nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu$$

Pour une onde qui serait une onde harmonique tronquée entre t et $t+\Delta t$, le spectre serait une fonction sinc/x comme dans le cas de la diffraction par une fente. Dans le cas de la fente les variables conjuguées de Fourier sont la position et la direction de propagation (plus précisément r et le vecteur d'onde k), ici ce sont le temps et la fréquence.



Elargissement spectral par effet de troncature.

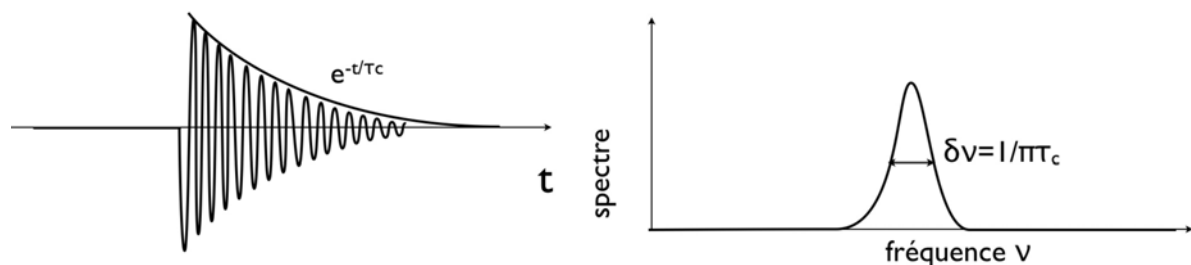
dans le cas plus réaliste d'une impulsion amortie exponentiellement

$$E(t) = e^{-i2\pi\nu_0 t} e^{-\frac{t}{2\tau_c}} \text{ et } I(t) \propto e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

et $I(\nu)$ est une Lorentzienne :

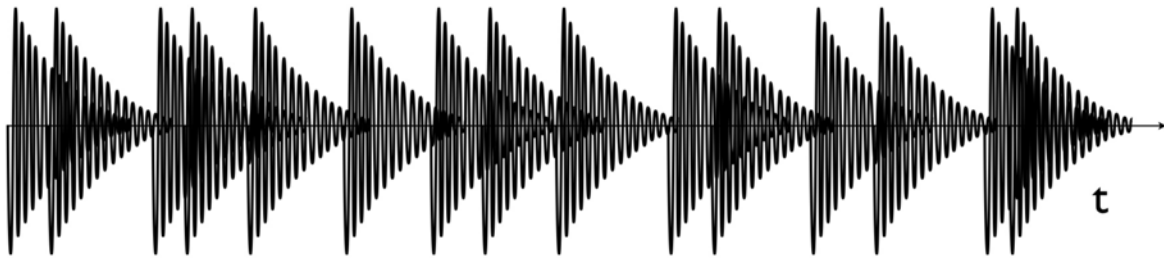
$$I(\nu) = \frac{1}{1 + 4\pi^2\tau_c^2(\nu - \nu_0)^2}$$

dont la demi largeur à mi-hauteur est : $\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau_c}$



Elargissement spectral par effet d'amortissement.

Remarque 1 : le résultat est inchangé dans le cas d'une série aléatoire de trains d'onde. La largeur spectrale est $\Delta\nu = \frac{1}{\pi\tau_c}$.

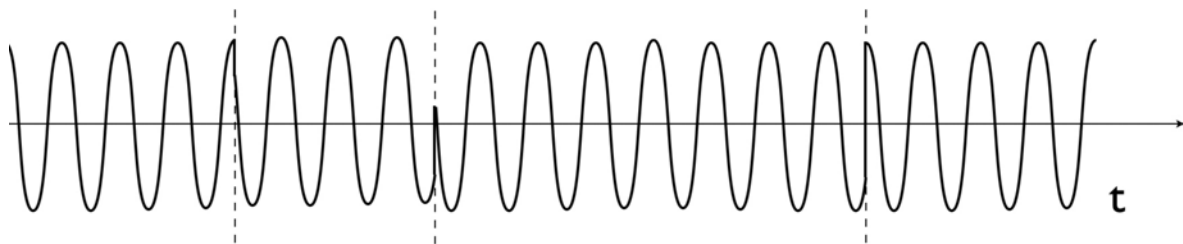


Série aléatoire d'impulsions amorties.

Remarque 2 : Dans la pratique il faut faire attention aux temps de déclin sur l'intensité ou sur l'amplitude (facteur 2)

Une autre source d'élargissement peut être observé par exemple dans un gaz dense où la fréquence des collisions est supérieure au temps à la fréquence de déclin. Dans ce cas, chaque collision introduit une rupture de phase de l'onde. L'élargissement est du type effet de fenêtre en $\sin(t_c\nu)/t_c\nu$ moyenné sur la distribution statistique des temps de collisions. Pour une distribution de Poisson, la moyenne donne à nouveau une distribution spectrale Lorentzienne

de largeur $\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\langle\tau_{col}\rangle}$ où $\langle\tau_{col}\rangle$ est le temps moyen entre collisions.



Sauts de phase.

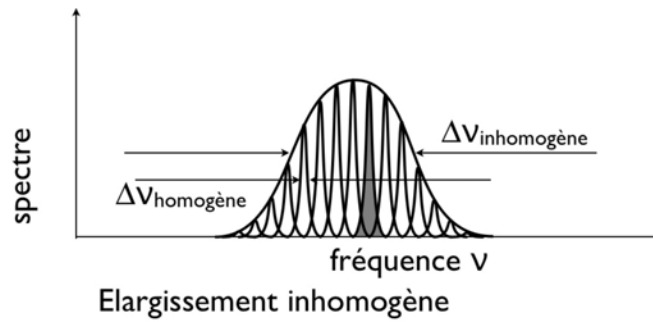
2.2.2 Elargissement Doppler

Dans le gaz, les fréquences émises sont légèrement différentes car, dû à l'agitation thermique, les atomes ont des vitesses différentes par rapport à l'observateur. La distribution des vitesses suit une répartition de Maxwell-Boltzmann (voir cours de physique statistique) en $e^{-\frac{Av^2}{k_B T}}$, ce qui donne une répartition des fréquences selon une loi dite Gaussienne

$$I(\nu) \propto e^{-\frac{(\nu-\nu_0)^2}{2\sigma^2}}$$

la largeur à mi-hauteur est déterminée par σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{k_B T}{mc^2}} v_0 \quad \Delta\nu = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma = \sqrt{\frac{8k_B T \ln 2}{mc^2}} v_0$$

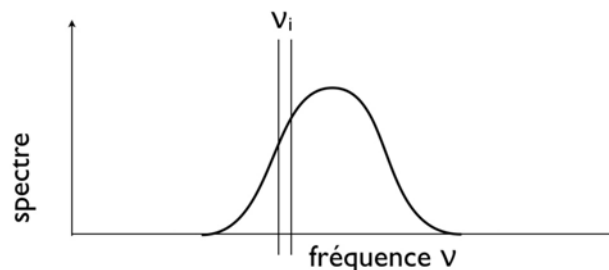


Elargissement inhomogène.

Note: comme nous le verrons dans le chapitre sur l'interaction matière-rayonnement, il existe des différences fondamentales entre ces deux types d'élargissement. Dans le premier cas, une seule transition possède déjà intrinsèquement la largeur spectrale $\Delta\nu$, on parle d'élargissement homogène. Dans le second cas, l'élargissement provient de la superposition de plusieurs spectres légèrement différents, on parle d'élargissement inhomogène. Pour une expérience d'interférence, cela ne fait pas de différence, il y a des phénomènes physiques où la différence entre largeur homogène et inhomogène est importante.

2.2.3 Durée et longueur de cohérence

Dans une expérience d'interférence, chaque partie de spectre ν_i va donner des interférences selon $I_{\nu_i}(\tau) = 2I_0(\nu_i)(1 + \cos(2\pi\nu_i\tau))$, où $2\pi\nu_i\tau$ est le déphasage entre les deux ondes. Cette écriture permet de garder la généralité de l'expérience d'interférence. La géométrie propre de l'expérience d'interférence considérée intervient lorsque l'on calcule explicitement $\tau(r)$.

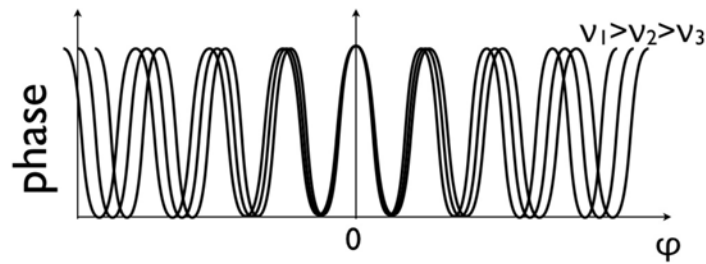


Spectre d'une source quasi-monochromatique.

Chaque contribution I_{ν_i} s'additionne en intensité car les fréquences sont différentes :

$$I = \sum_i 2I_0(\nu_i)(1 + \cos(2\pi\nu_i\tau))$$

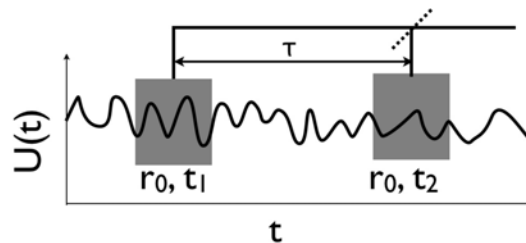
Les franges d'interférences se brouillent. On observera un certain nombre de franges autour de la position centrale à $\tau=0$ puis leur visibilité s'atténuera. En lumière blanche, la position $\tau=0$ apparaîtra blanche, elle porte le nom de teinte plate puis les franges deviennent irisées avec le bleu à l'intérieur et le rouge à l'extérieur.



Brouillage de l'interférogramme.

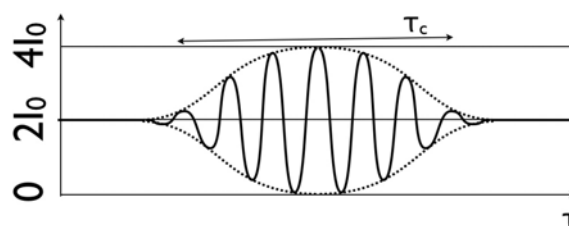
Plus qualitativement, en assimilant la distribution de fréquences à une fonction fenêtre de largeur $\Delta\nu$. La différence de phase en un point r entre chaque composante diffère au plus de $\Delta\varphi = 2\pi\Delta\nu\tau(r)$. Pour que les franges soient bien visibles, il faut que cette différence soit petite devant 2π soit

$$\tau < \tau_c = \frac{1}{\Delta\nu} \text{ temps de cohérence}$$



Cohérence temporelle.

ce qui définit le temps pendant lequel l'onde pourra interférer avec elle-même. C'est le temps de cohérence. Pendant ce temps l'onde s'est propagé de $L_c = c\tau_c$, c'est la longueur de cohérence. L'interférogramme montrera des franges d'interférences uniquement pour des retards inférieurs au temps de cohérence.



Interférogramme et cohérence temporelle.

2.3 Degré complexe de cohérence temporelle.

Revenons sur notre expérience de cohérence temporelle avec une source quasi-monochromatique de largeur spectrale $\Delta\nu \ll \nu_0$. Pour chaque fréquence, les intensités s'ajoutent et l'intensité totale s'écrit:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int I(\nu) d\nu \\
 I &= \int 2I(\nu)(1 + \cos(2\pi\nu\tau)) d\nu \\
 &= 2I_0 \left(1 + \int \frac{I(\nu)}{I_0} \cos(2\pi\nu\tau) d\nu\right) \\
 &= 2I_0 \left(1 + \int I^n(\nu) \cos(2\pi\nu\tau) d\nu\right)
 \end{aligned}$$

$I^n(\nu)$ est l'intensité spectrale normalisée. Il est plus commode de changer de variable en posant $\nu' = \nu - \nu_0$. On a alors $\nu' \ll \nu_0$. $I^n(\nu - \nu_0)$ est réel et à valeur entre 0 et 1, on peut donc écrire l'intégrale sous la forme complexe:

$$\begin{aligned}
 \int I^n(\nu' + \nu_0) \cos(2\pi\nu\tau) d\nu &= \int I^n(\nu' + \nu_0) \operatorname{Re}\left\{e^{-2i\pi(\nu' + \nu_0)\tau}\right\} d\nu' \\
 &= \operatorname{Re}\left\{e^{-2i\pi\nu_0\tau} \int I^n(\nu') e^{-2i\pi\nu'\tau} d\nu'\right\} \\
 &= \operatorname{Re}\left\{e^{-2i\pi\nu_0\tau} \gamma_t(\tau)\right\}
 \end{aligned}$$

La fonction $\gamma_t(\tau)$ s'appelle le *degré complexe de cohérence temporelle*.

$$\begin{aligned}
 \gamma_t(\tau) &= \int I^n(\nu') e^{-2i\pi\nu'\tau} d\nu' \\
 &= |\gamma_t(\tau)| e^{i\alpha_t}
 \end{aligned}$$

Ce qui n'est pas autre chose qu'une transformée de Fourier:

Théorème de Wiener-Khinchine : $\gamma_t(\tau)$ et $I^n(\nu)$ sont conjugués de Fourier

Pratiquement, comment mesure t'on $\gamma_t(\tau)$ à partir de notre expérience d'interférences ?

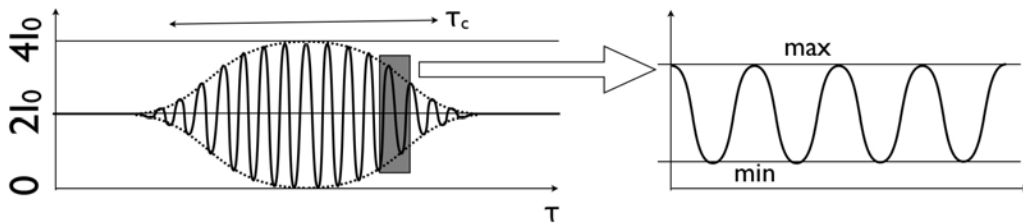
$$I(\tau) = 2I_0(1 + |\gamma_t(\tau)| \cos(2\pi\nu_0\tau - \alpha_t))$$

est une fonction qui varie ν_0 fois plus vite que $\gamma_t(\tau)$ et qui localement oscille entre des valeurs min et max.

$$\begin{aligned}
 I_{\max} &= 2I_0(1 + |\gamma_t(\tau)|) \\
 I_{\min} &= 2I_0(1 - |\gamma_t(\tau)|)
 \end{aligned}$$

et la visibilité:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\gamma_t(\tau)|$$



Interférograme et cohérence temporelle.

Deux conclusions intermédiaires importantes:

- 1 La visibilité est le module du degré complexe de cohérence temporelle.
- 2 Le spectre est la transformée de Fourier du degré complexe de cohérence temporelle.

Ces remarques sont à l'origine de deux systèmes d'instrumentation optique actuels:

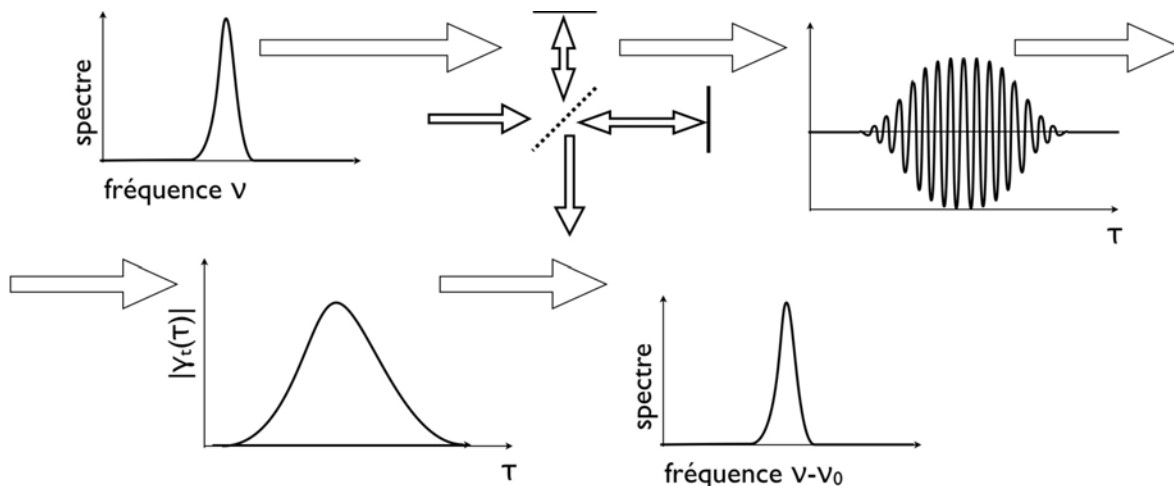
2.3.1 Spectromètre par transformée de Fourier

De manière simplifiée, la mesure de la visibilité $V(\tau)$ donne $|\gamma_t(\tau)|$ dans par exemple un interféromètre de Michelson. La transformée de Fourier inverse permet d'en déduire le spectre de la lumière utilisée. La pratique est un peu plus subtile car:

- On ne mesure que $|\gamma_t(\tau)|$ et non $\gamma_t(\tau)$, dont la connaissance est nécessaire pour faire correctement la TF inverse.

- On obtient le spectre centré en $\nu - \nu_0$ mais pas les valeurs absolues des fréquences.

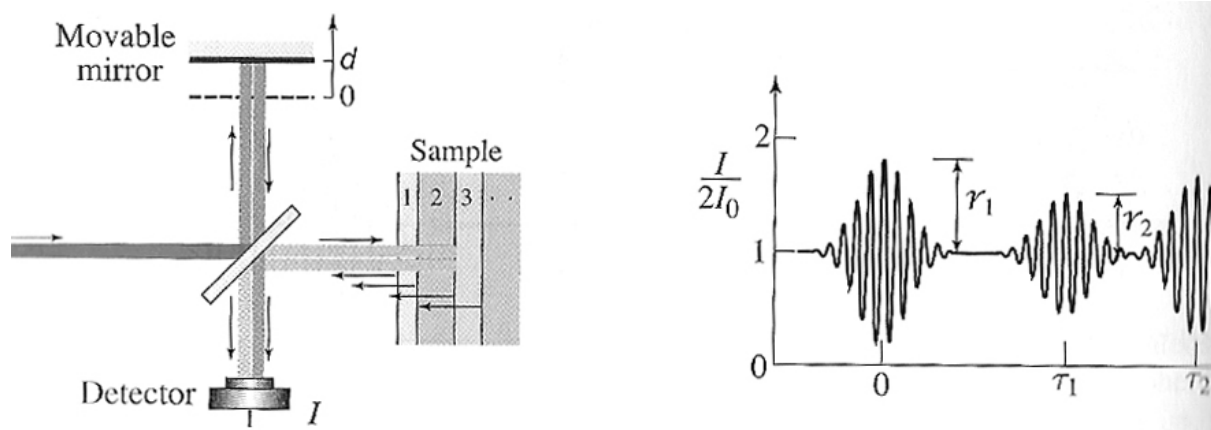
Pour cela il faut connaître la longueur physique des bras de l'interféromètre, ce qui nécessite une calibration.



Spectrométrie de Fourier.

2.3.2 Tomographie cohérente

En insérant un objet contenant des interfaces semi-réfléchissantes dans un interféromètre type Michelson et en utilisant une source lumineuse de faible longueur de cohérence, on peut en déduire la position en terme de chemin optique et la réflectivité des interfaces. Cette technique est fréquemment utilisée en imagerie médicale par exemple.



Tomographie cohérente.

$$\begin{aligned}
 I(\tau) &\propto \left\langle \left| E(t-\tau) + \sum_i r_i E(t-\tau_i) \right|^2 \right\rangle_t \\
 &= 2I_0 \left(1 + \sum_i r_i \operatorname{Re} \{ \gamma_r(\tau - \tau_i) \} + \sum_{i,j} r_i r_j^* \operatorname{Re} \{ \gamma_r(\tau_i - \tau_j) \} \right)
 \end{aligned}$$

Les premiers et troisièmes termes sont des constantes, seul le deuxième terme dépend de τ et permet d'en extraire r_i et τ_i .

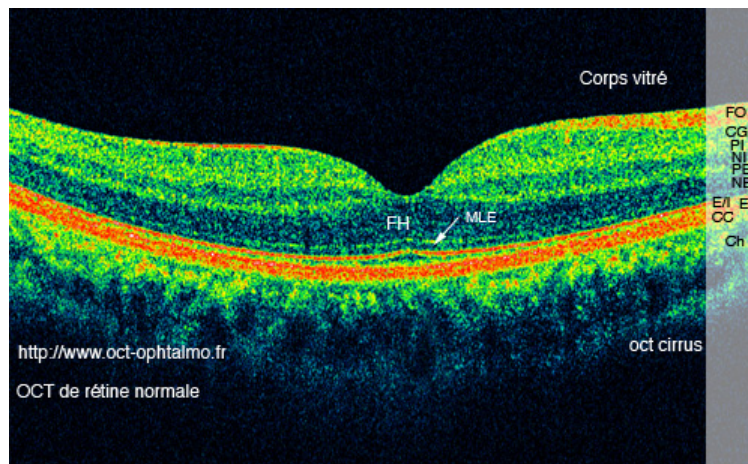


Image en coupe d'une rétine obtenue par tomographie cohérente optique (www.oct-ophtalmo.fr).

2.4 Présentation plus formelle de la cohérence temporelle.

Amplitude $U(r,t)$

Intensité $I(r,t) = |U(r,t)|^2$

Intensité moyenne pour un système stationnaire:

$$I(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |U(r,t)|^2 dt$$

Fonction d'autocorrélation du champ $U(r,t)$

$$G(\tau) = \langle U^*(t)U(t+\tau) \rangle \in \mathbb{C}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} U^*(t)U(t+\tau) dt$$

qui est différent de 0 si les fonctions sont corrélées et d'autant plus grand que la similitude est grande, et qui est nulle si les fonction sont décorrélées

$$I = G(0)$$

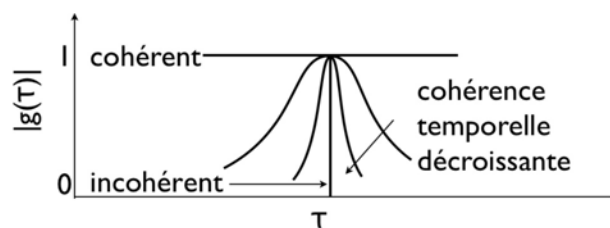
Il est plus commode manipuler des fonctions normalisées entre 0 et 1 telles que:

1 signifie cohérent
0 signifie incohérent

On définit :

$$\text{Degré complexe de cohérence temporelle : } g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)} = \frac{\langle U^*(t)U(t+\tau) \rangle}{\langle U^*(t)U(t) \rangle}$$

Pour une onde harmonique $Ae^{i\omega t}$, $g(\tau) = e^{i\omega\tau}$ et $|g(\tau)|=1$



Degré de cohérence.

Le *temps de cohérence* τ_c est défini comme la largeur à mi-hauteur de g , ou par une définition plus générale de la largeur:

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)|^2 d\tau = \text{surface de } |g(\tau)|^2$$

Densité de puissance spectrale :

Soit la transformée de Fourier de $U(t)$

$$V(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t)e^{-2i\pi\nu t} dt$$

pour éviter les difficultés en manipulant des fonctions stationnaires qui ne s'annulent pas à l'infini et ne sont pas de carré sommable:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} |U(t)|^2 dt \rightarrow \infty$$

et via l'identité de Parseval $\int_{-\infty}^{+\infty} |U(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |V(\nu)|^2 d\nu$ il est de même pour V.

on préfère considérer la *densité spectrale de puissance* c'est-à-dire l'intensité dI dans une bande de fréquence dν. Concrètement c'est la quantité qui est mesurée par un spectromètre, dénommée usuellement le spectre.

$U_T(t)$: fonction U tronquée entre -T/2 et T/2

$V_T(\nu)$: TF de $U_T(t)$

$$V_T(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

$$\text{Densité spectrale de puissance : } S(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |V_T(\nu)|^2 \rangle_{\text{réalisations}}$$

Rq: ici la moyenne est sur le nombre de réalisations de la même expérience (les fonctions U sont des fonctions aléatoires).

$$V_T(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

$$U_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_T(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

La fonction de corrélation de $U_T(t)$ s'écrit alors

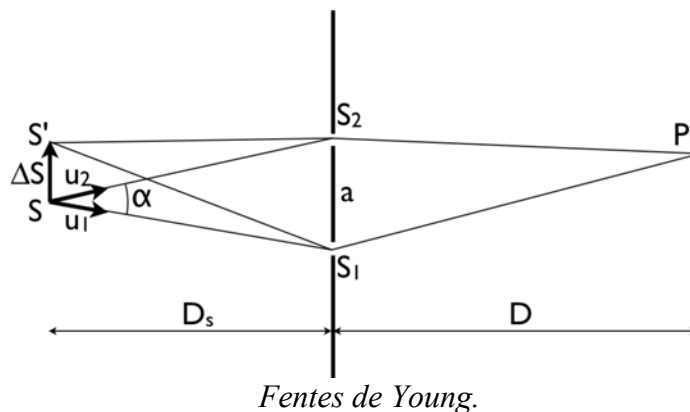
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} U_T^*(t) U_T(t + \tau) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_T^*(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} V_T(\nu) e^{2i\pi\nu(t+\tau)} d\nu \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} U_T^*(t) e^{2i\pi\nu t} dt \right] V_T(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} V_T^*(\nu) V_T(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |V_T(\nu)|^2 e^{2i\pi\nu\tau} d\nu \end{aligned}$$

Après division par T puis en faisant tendre t vers l'infini on obtient le théorème de Wiener-Khinchine de manière plus formelle (notez que cette version n'est plus entre quantités normalisées):

Théorème de Wiener-Khinchine : $G(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu$
 $G(\tau)$ et $S(\nu)$ sont conjugués de Fourier

2.5 Longueur de cohérence spatiale.

Effectuons une expérience de fentes de Young avec une source étendue dont chaque point émet de la lumière indépendamment. C'est-à-dire la lumière émise par deux points différents ne donne pas d'interférence et seules les intensités s'additionnent.



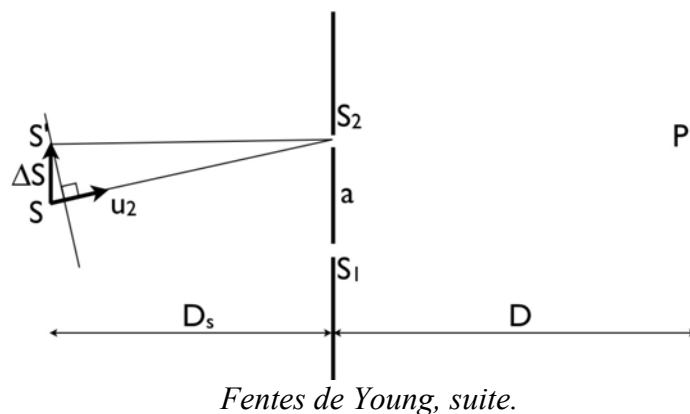
Comparons la différence de phase au point P sur l'écran pour un point source S translaté de ΔS en S' :

$$\Phi_1 = \frac{2\pi\nu}{c} \Delta L_1 = \frac{2\pi\nu}{c} (-SS_1P + SS_2P)$$

$$\Phi_2 = \frac{2\pi\nu}{c} \Delta L_2 = \frac{2\pi\nu}{c} (-S'S_1P + S'S_2P)$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{2\pi\nu}{c} \Delta L = \frac{2\pi\nu}{c} (S'S_2 - SS_2 - S'S_1 + SS_1)$$

Dans l'approximation des petits angles, $\sin\alpha = \tan\alpha = \alpha$, $S'S_2 - SS_2$ est la projection de ΔS sur u_2 soit $\Delta\vec{S} \cdot \vec{u}_2$ de même pour le deuxième terme $S'S_1 - SS_1$, $\Delta\vec{S} \cdot \vec{u}_1$



$$\Delta\Phi = \frac{2\pi\nu}{c}(\Delta\vec{S}\cdot\vec{u}_2 - \Delta\vec{S}\cdot\vec{u}_1) = \frac{2\pi\nu}{c}\Delta\vec{S}\cdot(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$$

Si $\Delta S \perp (u_2 - u_1)$, c'est-à-dire $\Delta S \perp$ l'axe des deux trous, il n'y a pas de déphasage supplémentaire et la visibilité reste inchangée. Ce qui permet de remplacer la source ponctuelle par une fente source perpendiculaire à l'axe des trous pour améliorer l'intensité du signal mesuré.

Si $\Delta S // (u_2 - u_1)$, $|u_2 - u_1| = \sin\alpha$, $\alpha = a/D_s$

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi\nu}{c}\Delta S \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi\nu}{c}\alpha\Delta S = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta S \frac{a}{D_s}$$

de la même manière que dans le cas précédent (cohérence temporelle), les contributions de chacun des points s'ajoutent en intensité car les source sont indépendantes

$$I = \sum_i 2I_0(\nu_i)(1 + \cos(\Phi_i))$$

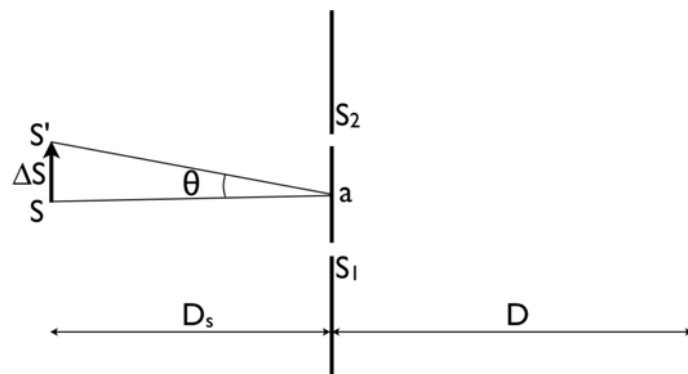
$$\Phi_i = \frac{2\pi\nu}{c}(S(r_i)S_2P - S(r_i)S_1P)$$

et les franges vont se brouiller si $\Delta\Phi \approx 2\pi$, soit:

$$\frac{2\pi}{\lambda}\Delta S \frac{a_c}{D_s} \approx 2\pi$$

$$a_c \approx \lambda \frac{D_s}{\Delta S} \approx \frac{\lambda}{\theta} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\Delta S}{D_s}$$

où θ est l'angle sous lequel la source est vue depuis les fentes



Fentes de Young, suite et fin.

a_c est la *longueur de cohérence spatiale* :

Si $a < a_c$, on observe des interférences, on somme les amplitudes, les ondes séparées de a sont cohérentes.

Si $a > a_c$, on somme les intensités, il n'y a plus d'interférences, les ondes séparées de a sont incohérentes.

Remarques importantes: On vient de voir

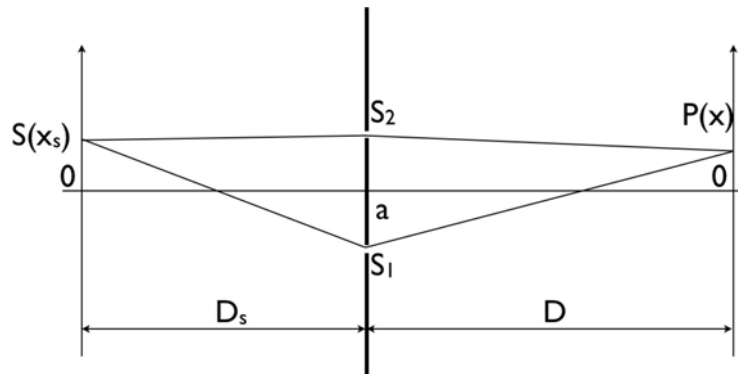
1 Comment définir une longueur de cohérence spatiale

2 Comment fabriquer une telle source partiellement cohérente spatialement à partir d'une source étendue incohérente

3 La cohérence spatiale est une quantité qui évolue au cours de la propagation. On reviendra sur ce dernier point plus tard.

2.6 Degré de cohérence spatiale.

Généralisons le calcul des fentes de Young précédent avec une source étendue.



Fentes de Young avec une source étendue.

$$I = \int 2I_s(x_s)(1 + \cos(\varphi(x_s)))dx_s$$

$$\varphi = \varphi_s + \varphi_p = \frac{2\pi\nu}{c}(SS_2 - SS_1 + S_2P - S_1P)$$

maintenant c'est la dépendance de $I(x)$ avec a qui nous intéresse. Le même calcul que précédemment donne

$$\varphi_s = \frac{2\pi}{\lambda} S_0 S(x_s) \vec{u}_x \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax_s}{D_s}$$

$$\varphi_p = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}$$

et

$$\begin{aligned} I &= 2I_0 \left(1 + \int \frac{I(x_s)}{I_0} \cos(\varphi_s + \varphi_p) dx_s \right) \\ &= 2I_0 \left(1 + \int I_n(x_s) \cos(\varphi_s + \varphi_p) dx_s \right) \end{aligned}$$

$I_n(x_s)$ est l'intensité spatiale normalisée. De même $I_n(x_s)$ est réel et $\in [0,1]$ on peut l'écrire comme la partie réelle d'un nombre complexe et faire apparaître l'intégrale:

$$\text{Re} \left\{ e^{-i\varphi_p} \int I_n(x_s) e^{-i\varphi_s} dx_s \right\} = \text{Re} \left\{ \gamma_s e^{-i\varphi_p} \right\}$$

où $\gamma_s(u)$ est le *degré complexe de cohérence spatiale*

$$\begin{aligned}\gamma_s(u) &= \int I_n(x_s) e^{-2i\pi u x_s} dx_s \\ &= |\gamma_s(u)| e^{i\alpha_s} \\ u &= \frac{a}{\lambda D_s} = \frac{\theta_s}{\lambda}\end{aligned}$$

ces deux quantités forment des fonctions conjuguées de Fourier et dont les variables conjuguées sont u et x :

Théorème de Zernike et Van Cittert: $\gamma_s(u)$ et $I_n(x_s)$ sont conjugués de Fourier

L'intensité totale est

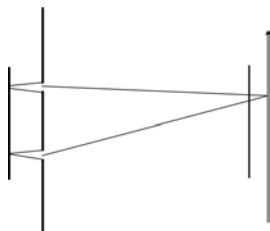
$$I(u) = 2I_0(1 + |\gamma_s(u)| \cos(\varphi_p - \alpha_s))$$

qui va donner des franges dont la visibilité est

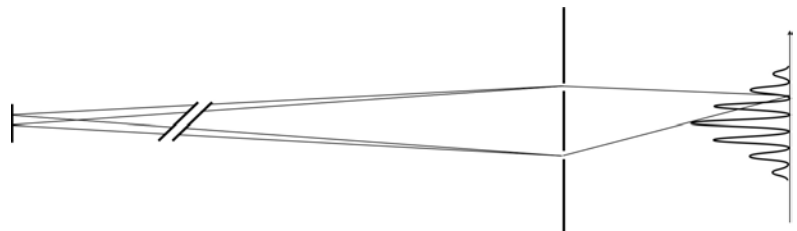
$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\gamma_s(u)|$$

Note: ici $I(u)_{x=Cst}$ est l'interférogramme obtenu en un point $P(x)$ fixe en faisant varier a . En pratique on fait rarement cette expérience mais on observe l'interférogramme $I(x)_{a=Cst}$ en remarquant que $\varphi_p = 2\pi \frac{ax}{\lambda D} = 2\pi u x \frac{D}{D_s}$.

L'interprétation physique de ce résultat est que la cohérence se propage et se construit au cours de la propagation selon une loi définie par une transformation de Fourier dont une variable est l'angle sous lequel est vue la source. L'aspect propagation apparaît dans l'écriture de la variable conjuguée u qui dépend de D_s , distance de la source ou alternativement dans θ_s . On peut même écrire des équations de propagation de la cohérence.



Chaque fente voit chacune une source indépendante, incohérente entre elles.



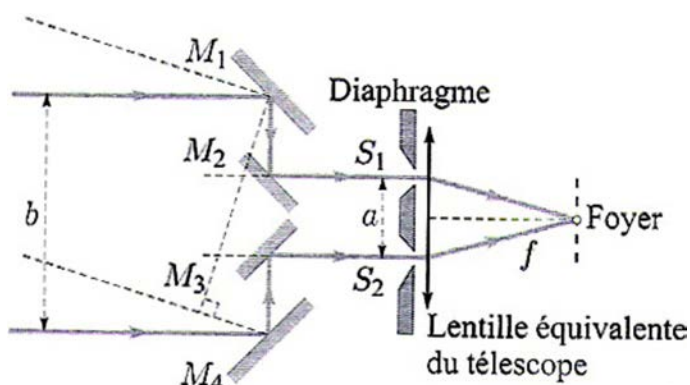
Les deux fentes voient les deux sources de manière égale. La lumière qui arrive sur une fente présente les mêmes fluctuations que celle qui arrive sur l'autre fente.

Construction de la cohérence spatiale au cours de la propagation.

On peut citer deux applications pratiques:

2.6.1 En astronomie, le télescope à synthèse d'ouverture

C'est le principe équivalent du spectromètre de Fourier transposé à la cohérence spatiale. La mesure expérimentale de $\gamma_s(u)$ permet de remonter à $I_n(x_s)$. Là aussi le fait que l'on ne mesure que $|\gamma_s(u)|$ complique un peu les choses. Concrètement c'est Michelson en 1890 qui utilisa cette technique pour mesurer le diamètre angulaire d'une étoile en utilisant des miroirs afin d'augmenter l'ouverture effective du télescope. On peut montrer que la résolution obtenue est équivalente à celle d'un télescope de diamètre égale à la séparation des miroirs. Plus tard cette technique a été utilisée en radioastronomie, puis Labeyrie dans les années 1970 a réussi à coupler deux télescopes distants de plusieurs dizaines de mètres entre eux, atteignant des résolutions de 0,001 secondes d'arc.

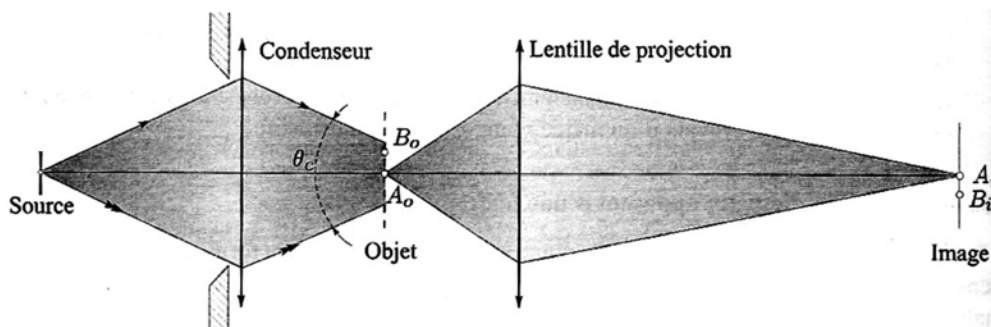


Télescope à synthèse d'ouverture.



VLT Mont Paranal, Chili.

2.6.2 Cohérence spatiale et illumination d'un microscope



Dans un microscope, le condenseur permet d'éclairer l'objet. Il permet aussi de modifier la cohérence spatiale des différents points de l'objet. Plus l'ouverture est grande plus l'angle de convergence des faisceaux arrivant sur l'objet est grand ce qui réduit la cohérence, alternativement en fermant le diaphragme on augmente la cohérence, ce qui est un paramètre important pour l'imagerie d'objets à la limite de la résolution du microscope.

2.7 Formulation générale de la cohérence.

Corrélation entre les points r_1 et r_2 , séparés de l'instant τ :

Fonction de cohérence mutuelle

$$G(r_1, r_2, \tau) = \langle U^*(r_1, t) U(r_2, t + \tau) \rangle$$

Notons que $G(r, r, 0) = I(r)$ et $G(r, r, \tau)$ est la fonction d'autocorrélation temporelle

Degré complexe de cohérence, $G(r_1, r_2, \tau)$ normalisée est à valeur dans l'intervalle $[0, 1]$:

$$g(r_1, r_2, \tau) = \frac{G(r_1, r_2, \tau)}{\sqrt{G(r_1, r_1, 0)G(r_2, r_2, 0)}} = \frac{G(r_1, r_2, \tau)}{\sqrt{I(r_1)I(r_2)}}$$

lorsque l'on ne s'intéressera que à la partie spatiale, on omettra le terme temporel, $\tau = 0$.

Intensité mutuelle

$$G(r_1, r_2, 0)$$

Et sa valeur normalisée

$$g(r_1, r_2) = g(r_1, r_2, \tau = 0) = \frac{G(r_1, r_2, 0)}{\sqrt{G(r_1, r_1, 0)G(r_2, r_2, 0)}} = \frac{G(r_1, r_2, 0)}{\sqrt{I(r_1)I(r_2)}}$$

Interférences entre deux ondes U_1 et U_2 .

$$\begin{aligned} I &= \langle |U_1 + U_2|^2 \rangle = \langle |U_1|^2 \rangle + \langle |U_2|^2 \rangle + \langle U_1^* U_2 \rangle + \langle U_1 U_2^* \rangle \\ &= I_1 + I_2 + G_{12} + G_{12}^* \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |g_{12}| \cos \varphi \\ g_{12} &= |g_{12}| e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où les deux ondes sont complètement corrélées:

$$g_{12} = \frac{\langle A^* e^{-i\omega t} A e^{i\omega t + \varphi} \rangle}{|A|^2} = e^{i\varphi}$$

et $|g_{12}| = 1$, il y a des franges d'interférences en fonction de φ .

Dans le cas particulier où les deux ondes ne sont pas corrélées, $g_{12} = 0$, il n'y a pas de franges d'interférences.

La visibilité des franges est

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)} |g_{12}| = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |g_{12}|$$

Si les deux intensités sont égales, $I_1 = I_2$ et $V = |g_{12}|$

Le cas de la cohérence temporelle correspond à $U_1=U_2=U(r,t)$

Le cas de la cohérence spatiale correspond à $U_1=U(r_1,0)$, $U_2=U(r_2,0)$

2.7.1 Ordres supérieurs de la fonction de cohérence

On peut définir des moments statistiques d'ordre supérieur:

| | | |
|------------------------------------|---|------------------------------|
| Intensité | $I = \langle U^* U \rangle$ | autocorrélation à $\tau = 0$ |
| Corrélation 1 ^{er} ordre | $G^{(1)}(r_1, r_2, \tau) = \langle U^*(r_1, t) U(r_2, t + \tau) \rangle$ | corrélation de l'amplitude |
| Corrélation 2 ^{ème} ordre | $G^{(2)} = \langle U^*(r_1, t_1) U^*(r_2, t_2) U(r_3, t_3) U(r_4, t_4) \rangle$ $= \langle U^*(r_1, t_1) U^*(r_2, t_1 + \tau_2) U(r_3, t_1 + \tau_3) U(r_4, t_1 + \tau_4) \rangle$ | |
| Etc... | | |

Regardons le cas simple $r_1=r_2$, $r_3=r_4$, $t_1=t_2=t$ et $t_3=t_4=t+\tau$

$$G^{(2)}(r_1, r_1, r_2, r_2, 0, \tau, \tau) = \langle |U(r_1, t)|^2 |U(r_2, t + \tau)|^2 \rangle_t$$

$$= \langle I(r_1, t) I(r_2, t + \tau) \rangle_t$$

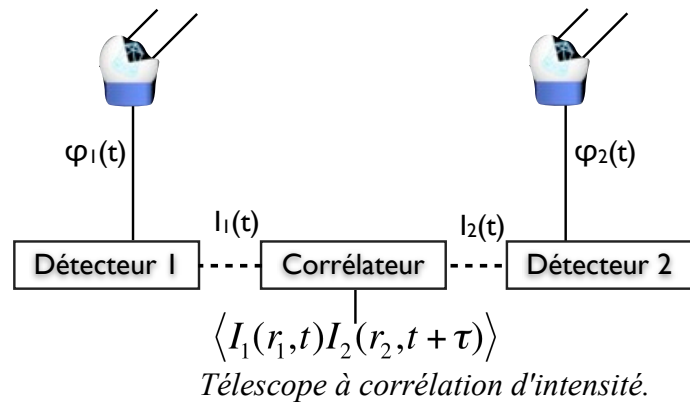
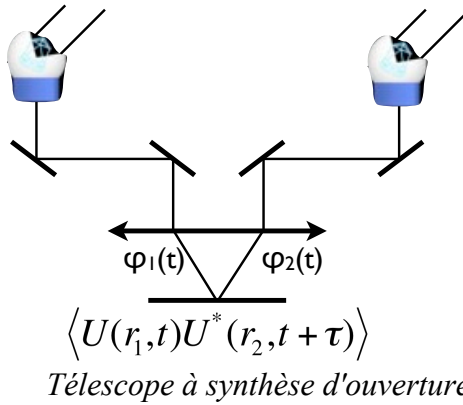
Alors que $G^{(1)}$ mesure des corrélations d'amplitude, dans cette exemple particulier de $G^{(2)}$ on mesure des corrélations d'intensité.

Note: Ce ne sont pas seulement des raffinements mathématiques, c'est ce qui fait la différence entre une lumière laser de largeur spectrale $\delta\nu$ et d'étendue optique $dSd\Omega$ et une émission spontanée de lumière de même caractéristiques spectrales et géométriques.

2.7.2 Interféromètre à corrélation d'intensité

Ce type de corrélation du deuxième ordre a été mis à profit par Hanbury-Brown et Twiss en 1954-1958 dans le but d'améliorer les performances des télescopes à synthèse d'ouverture. Idéalement dans un tel télescope, on mesure $\gamma_s(u)$, la fonction de corrélation de l'amplitude $\langle U^*(r_1, t) U(r_2, t + \tau) \rangle$. Les performances sont en fait limitées par les instabilités mécaniques dans l'interféromètre du télescope.

Dans un interféromètre à corrélation d'intensité, on mesure la fonction de corrélation $\langle I(r_1, t) I(r_2, t) \rangle$ dont on peut montrer que l'on peut en déduire $|\gamma_s(u)|^2$ (la démonstration rigoureuse n'est pas simple et dépasse le cadre de ce cours). L'intérêt d'un tel système réside dans le fait qu'il n'est nécessaire de n'amener au niveau du corrélateur que des informations d'intensité, qui sont beaucoup plus robustes que l'amplitude et la phase utilisées dans un télescope à synthèse d'ouverture. En pratique le rapport signal sur bruit reste moins bon qu'un interféromètre à synthèse d'ouverture

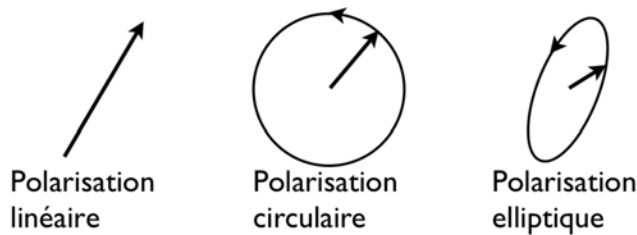


2.8 Polarisation partielle.

Jusqu'à présent nous avons considéré un champ scalaire. En fait le champ électromagnétique est vectoriel (voir Optique I), ce qui conduit à la notion de polarisation de l'onde. Rappel du semestre précédent:

Lumière totalement polarisée, exemple pour une onde plane monochromatique: le champ électrique a la forme:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i(\omega t + \varphi_x)} \\ E_{0y} e^{i(\omega t + \varphi_y)} \end{pmatrix}$$



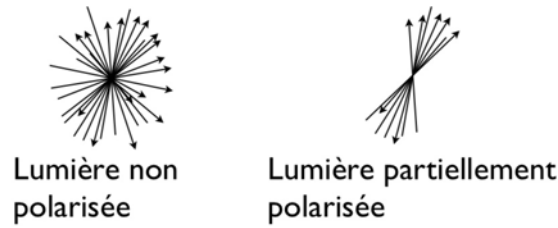
Différents états de polarisation de la lumière-

Polarisation linéaire : $\varphi_x - \varphi_y = 0 [\pi]$

Polarisation circulaire : $\varphi_x - \varphi_y = \pi/2 [\pi]$

On peut caractériser la polarisation par le vecteur de Jones $\vec{J} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{pmatrix}$

Une lumière dépolarisée est conçue comme une onde électromagnétique dont la direction des vecteurs E et H varie aléatoirement et dont la direction moyenne est 0. Qualitativement une onde partiellement polarisée est un objet intermédiaire où la direction des vecteurs E et H fluctue autour d'une valeur moyenne non nulle.



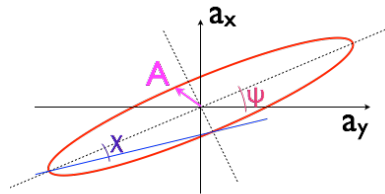
Différents degrés de polarisation de la lumière-

Ceci dit il vient immédiatement des interrogations du genre : Quelle différence y a t'il entre une lumière polarisée circulairement et une lumière dépolarisée ?

2.8.1 Vecteur de Jones, paramètres de Stokes et sphère de Poincaré

Dans la suite A désigne un champ vectoriel quelconque, qui peut être E ou H par exemple

Soit le cas général d'une polarisation elliptique:



Polarisation elliptique

$\chi = 0$ polarisation linéaire

$\chi = 0 \quad \psi = 0 [\pi]$ polarisation linéaire π_x

$\chi = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$ polarisation circulaire

$\chi = 0 \quad \psi = \frac{\pi}{2} [\pi]$ polarisation linéaire π_y

$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_{0x} e^{i(\omega t + \varphi_x)} \\ A_{0y} e^{i(\omega t + \varphi_y)} \end{pmatrix}$ et l'intensité est $I = |A_{0x}|^2 + |A_{0y}|^2$

on définit et on a les relations suivantes (à faire en exercice):

déphasage entre les deux quadratures

$$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

$$r = \frac{A_{0y}}{A_{0x}}$$

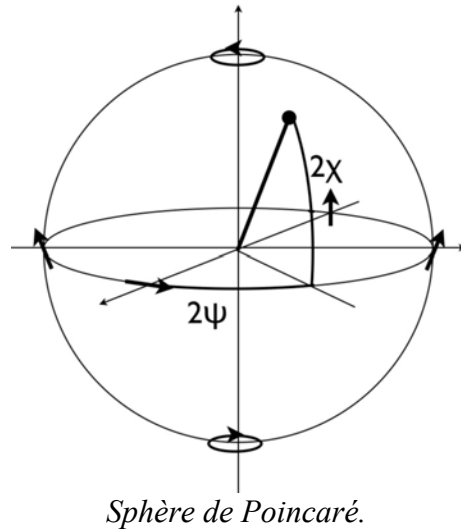
taux de polarisation complexe

$$\gamma_p = r e^{i\varphi}$$

$$\tan 2\psi = \frac{2r}{1-r^2} \cos \varphi$$

$$\tan 2\chi = \frac{2r}{1+r^2} \sin \varphi$$

L'état de polarisation est représenté par un point sur la sphère de rayon 1 et de coordonnées polaires θ et ϕ . Cette sphère porte le nom de *sphère de Poincaré*. L'équateur porte toutes les polarisations linéaires et les pôles les deux polarisations circulaires droite et gauche.



Il n'y a pas d'information d'intensité dans un point sur la sphère de Poincaré. On peut l'introduire en définissant les paramètres dits *paramètres de Stokes*. S_0 est l'intensité et $S_{1,2,3}/S_0$ sont les coordonnées du vecteur sur la sphère de Poincaré :

$$\begin{aligned} S_0 &= |A_{0x}|^2 + |A_{0y}|^2 \\ S_1 &= S_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \\ S_2 &= S_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \\ S_3 &= S_0 \sin 2\chi \end{aligned}$$

ou bien en fonction des paramètres de l'ellipse:

$$\begin{aligned} S_0 &= |A_{0x}|^2 + |A_{0y}|^2 \\ S_1 &= |A_{0x}|^2 - |A_{0y}|^2 \\ S_2 &= 2A_{0x}A_{0y} \cos \varphi = 2\text{Re}\{A_x^* A_y\} \\ S_3 &= 2A_{0x}A_{0y} \sin \varphi = 2\text{Im}\{A_x^* A_y\} \end{aligned}$$

Remarque: les paramètres de Stokes sont redondants pour une onde polarisée, trois suffisent car $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$

2.8.2 Matrice de cohérence

Considérons maintenant des fonctions du champ $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix}$ qui fluctuent aléatoirement dans le temps. Les fonctions de corrélations que l'on peut écrire sont:

$$\begin{aligned} G_{xx}(\tau) &= \langle U_x^*(t) U_x(t + \tau) \rangle \\ G_{yy}(\tau) &= \langle U_y^*(t) U_y(t + \tau) \rangle \\ G_{xy}(\tau) &= \langle U_x^*(t) U_y(t + \tau) \rangle = G_{yx}^*(\tau) \end{aligned}$$

Pour des ondes monochromatiques $G_{xx}(\tau) = G_{yy}(\tau) = |A(r)|^2 e^{i\omega\tau}$ et les propriétés de polarisation sont données par les valeurs en $\tau = 0$. Pour une onde partiellement cohérente, on serait aussi conduit à définir un temps ou une surface de cohérence de la polarisation. Dans la suite on ne considérera que des ondes harmoniques et l'on note les valeurs en $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} G_{xx}(0) &= G_{xx} = I_x \\ G_{yy}(0) &= G_{yy} = I_y \\ G_{xy}(0) &= G_{xy} = G_{yx}^* \end{aligned}$$

on définit la *matrice de cohérence*:

$$G = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{bmatrix}$$

Remarquons que

$$\text{tr}(G) = I$$

2.8.3 Liens entre matrice de cohérence et vecteur de Jones

Pour une onde harmonique nous avons défini le vecteur de Jones par le vecteur U en omettant la partie dépendante du temps en $e^{i\omega t}$:

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} U_{0x} e^{i\varphi_x} \\ U_{0y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix}$$

pour des fonctions aléatoires, il n'est plus possible de faire ainsi et il est nécessaire de considérer le vecteur dans son ensemble

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix}$$

La matrice de cohérence s'écrit alors :

$$G = \begin{bmatrix} \langle U_x^* U_x \rangle & \langle U_x^* U_y \rangle \\ \langle U_y^* U_x \rangle & \langle U_y^* U_y \rangle \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} U_x^* \\ U_y^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x & U_y \end{bmatrix} \right\rangle = \langle J^* J^t \rangle$$

Notez que pour une onde complètement polarisée l'expression coïncide pour les deux définitions de J , la moyenne temporelle étant simplement sans objet, les composantes de $J^* J^t$ se réduisant à des constantes.

2.8.4 Action d'un élément optique agissant sur la polarisation

Rappel optique I: $J' = T \cdot J$ où T est la matrice de Jones qui caractérise le composant

$$\begin{aligned}
 G' &= \langle (TJ)^* (TJ)^t \rangle \\
 &= \langle T^* J^* J^t T^t \rangle \\
 &= T^* G T^t
 \end{aligned}$$

2.8.5 Généralisation à une onde partiellement polarisée

$$S_0 = G_{xx} + G_{yy}$$

$$S_1 = G_{xx} - G_{yy}$$

$$S_2 = 2\text{Re}\{G_{xy}\}$$

$$S_3 = 2\text{Im}\{G_{xy}\}$$

qui coïncide bien avec la définition précédente pour une onde polarisée. Les S_i sont réels.

Comme $|G_{xy}|^2 \leq G_{xx} G_{yy}$ ($|\int f|^2 \leq \int |f|^2$ et $|\int fg| \leq \int |f||g|$) on a (faire en exercice) :

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

On peut situer le point $S = \frac{1}{S_0} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ sur la sphère de Poincaré. Il se situe sur la *surface* de la

sphère si l'état est cohérent et complètement polarisé. Il est à *l'intérieur* de la sphère si l'onde est partiellement polarisée et à l'origine si l'onde est non polarisée.

Exemple :

(utiliser $G = \langle J^* J^t \rangle$)

| | | | | |
|---------------|--------------------|---|--------------------|--|
| Etat polarisé | linéairement sur x | $G = I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ | linéairement à 45° | $G = \frac{I}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ |
| | circulairement | $G = \frac{I}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ | non polarisé | $G = \frac{I}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |

Ce qui permet de répondre à notre question initiale : ce qui différencie la lumière polarisée circulairement de la lumière non polarisée ce sont les corrélations entre les deux composantes du champ sur x et y.

Finalement on peut définir le *degré de polarisation* P:

$$P = \sqrt{1 - \frac{4 \det(G)}{\text{tr}(G)^2}} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}$$

$$\text{on a } 0 \leq P \leq 1$$

C'est la distance à l'origine de la sphère de Poincaré. $P = 0$ pour une onde non polarisée et $P = 1$ pour une onde polarisée.