

# Cours d'optique II

## Physique

### Bachelor semestre 6

### 2017-2018

## -2- Cohérence partie I

Romuald Houdré

Institut de Physique, IPHYS  
romuald.houdre@epfl.ch  
Tel: 35487

I

## Bibliographie:

\***Fundamentals of photonics** / B.E.A. Saleh et M.C. Tech, en anglais

\***Optique** / J.P. Pérez, en français

\***Lasers and electro-optics** / C.C. Davis, en anglais

\***Principle of optics** / M. Born et E. Wolf, en anglais

\***Optical coherence and quantum optics** / L. Mandel et E. Wolf

Certaines figures des notes de cours sont inspirées ou copiées de ces livres

2

## Introduction

### Interférences de deux ondes

$$E_1 = E_1 e^{i\omega_1 t} e^{i\phi_1}$$

$$E_2 = E_2 e^{i\omega_2 t} e^{i\phi_2}$$



$$|E_1 + E_2|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2 E_1 E_2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\phi_1 - \phi_2))$$

$$I \propto \langle |E|^2 \rangle_t$$

- $\omega_1 = \omega_2$  et déphasage stationnaire

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta \phi(t))$$

Régime cohérent

- $\omega_1 \neq \omega_2$  ou bien le déphasage fluctue sur  $[0, 2\pi]$

$$I = I_1 + I_2$$

Régime incohérent

3

## Introduction

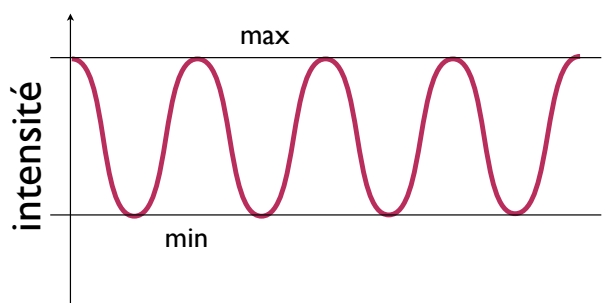
### Interférences de deux ondes

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta \phi(t))$$

Régime cohérent

$$I = I_1 + I_2$$

Régime incohérent



$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2}$$

$$I = I_1 + I_2 - 2 \sqrt{I_1 I_2}$$

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Contraste  
Visibilité

$$I_1 = I_2$$

$$I_{\max} = 4 I_1$$

$$I_{\min} = 0$$

$$V = 1$$

Cohérent

$$I_{\max} = I_{\min} = 2 I_1$$

$$V = 0$$

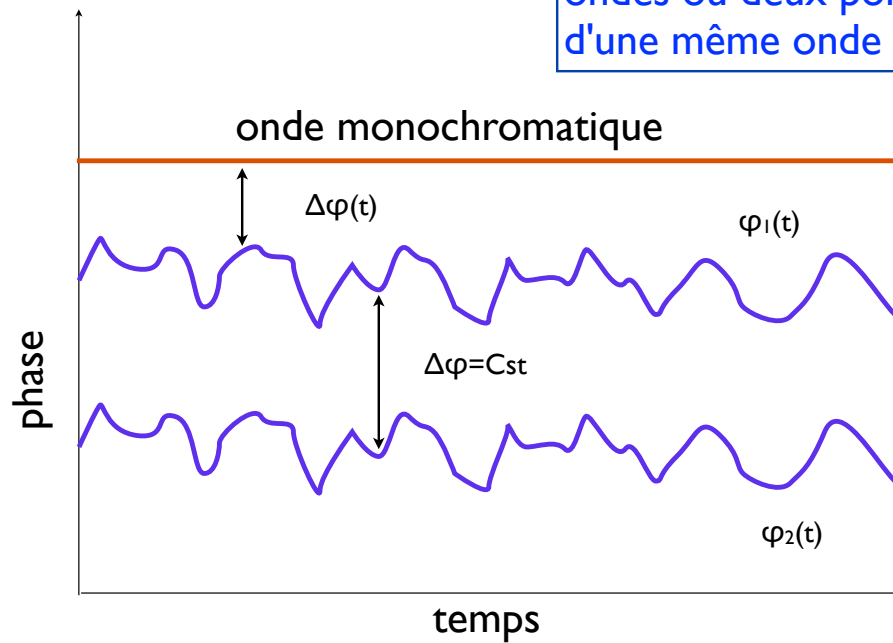
Incohérent

4

## Introduction

Plus précisément ?

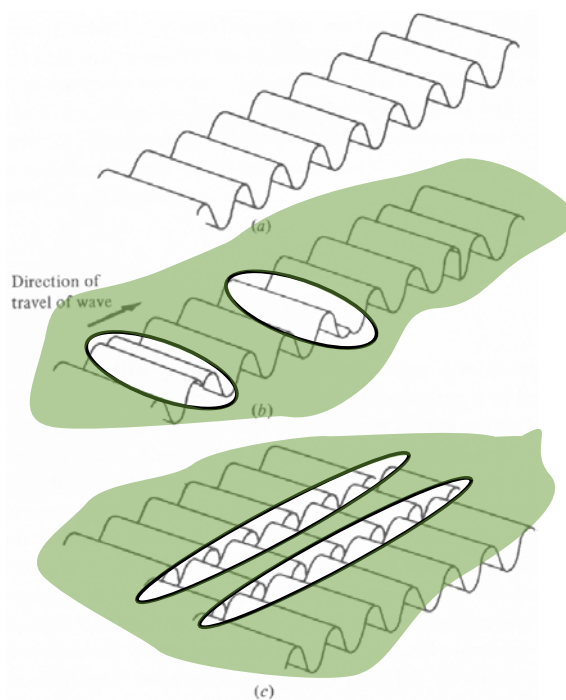
Notion relative entre deux ondes ou deux portions d'une même onde



5

## Introduction

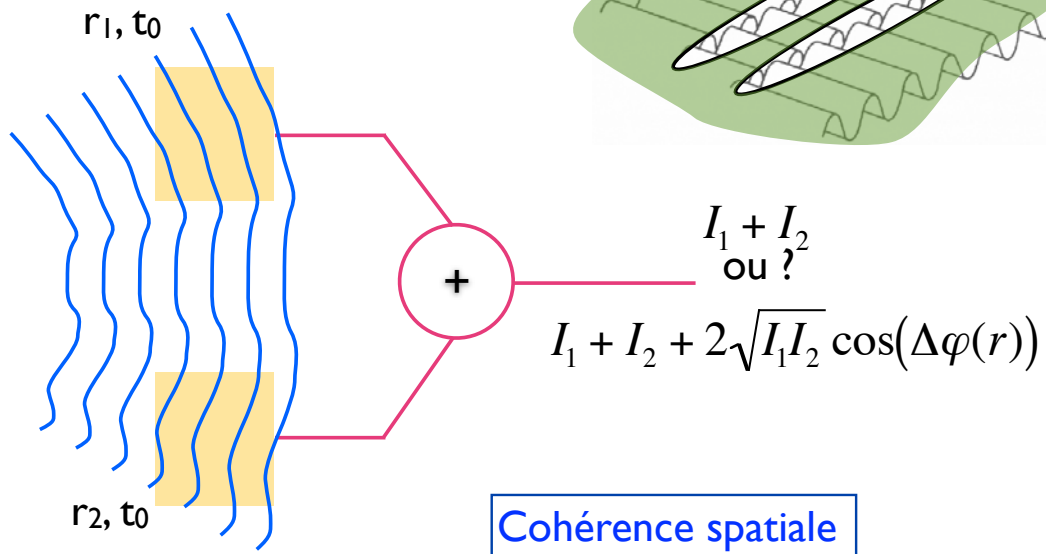
Plus précisément ?



6

## Introduction

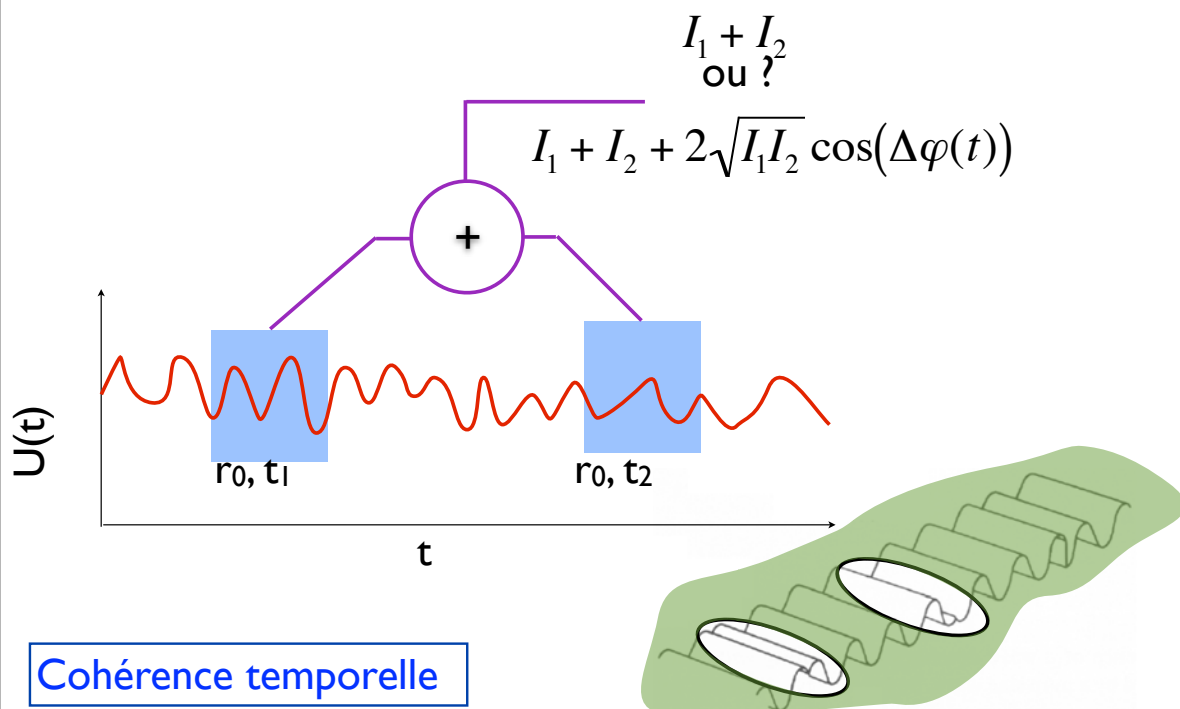
Comment l'observer ?



7

## Introduction

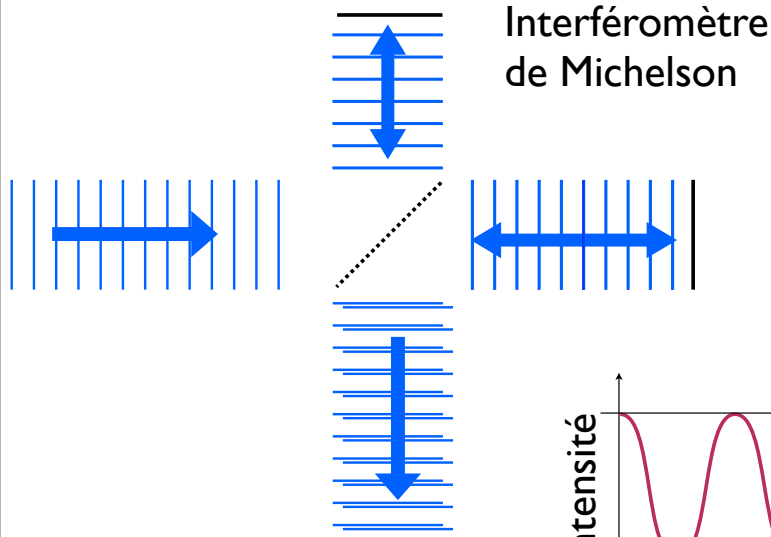
Comment l'observer ?



8

## Introduction

Comment l'observer ?

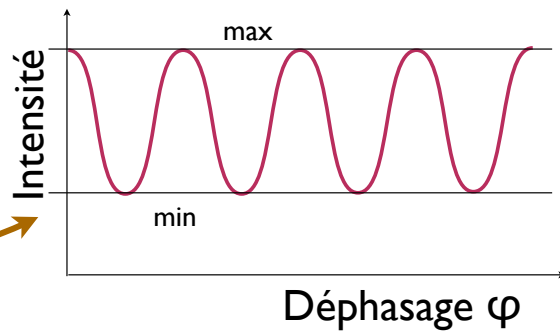


Interféromètre de Michelson



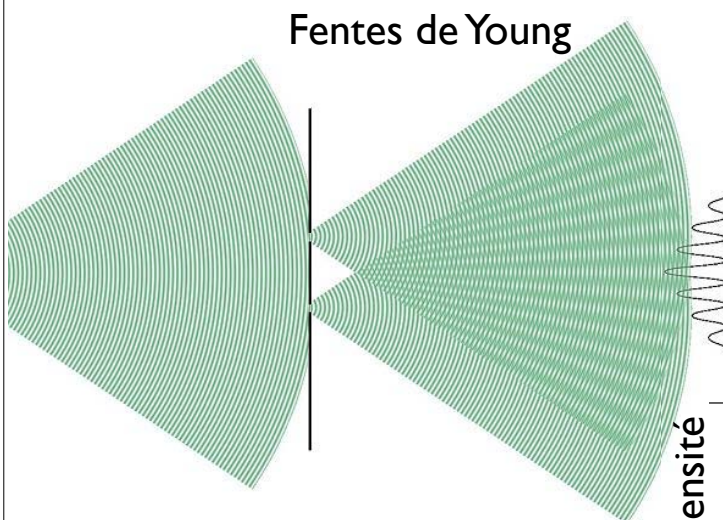
Albert Michelson  
1852-1931

Interféromètre à division d'amplitude



## Introduction

Comment l'observer ?

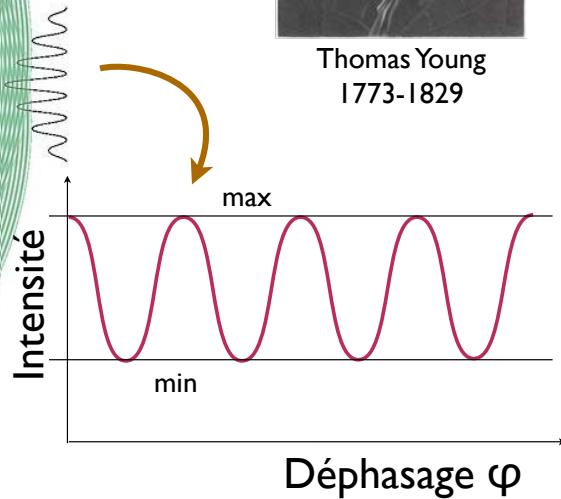


Fentes de Young



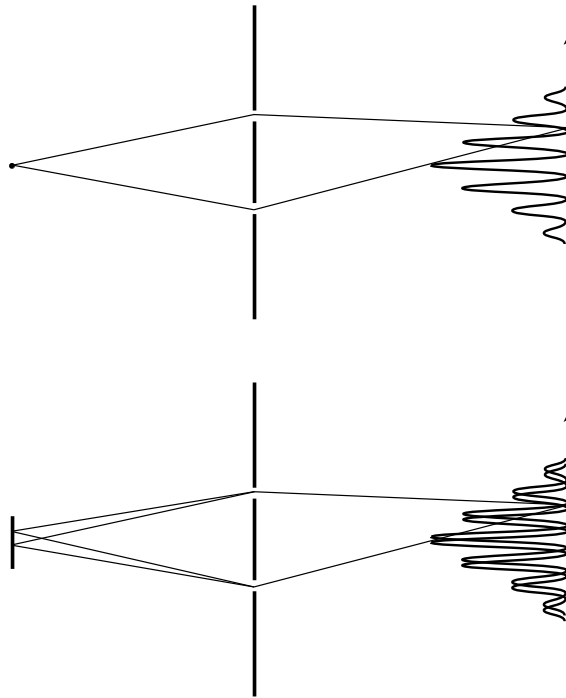
Thomas Young  
1773-1829

Interféromètre à division du front d'onde



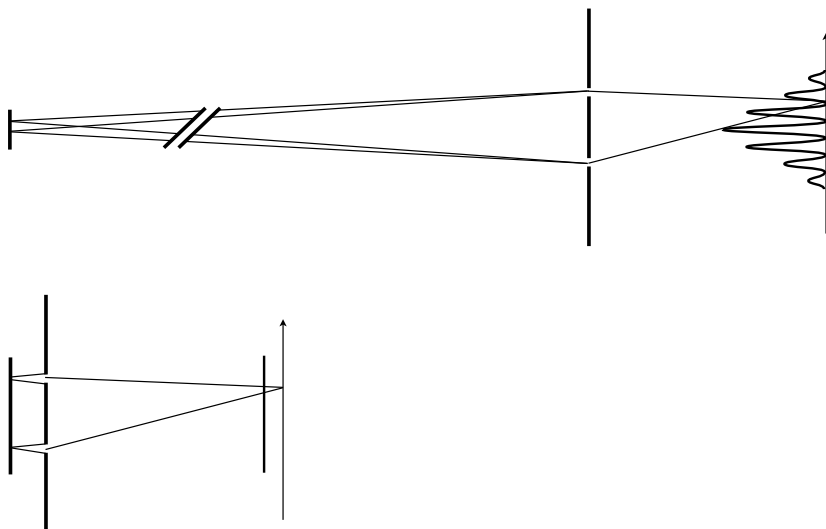
# Introduction

Source étendue ?



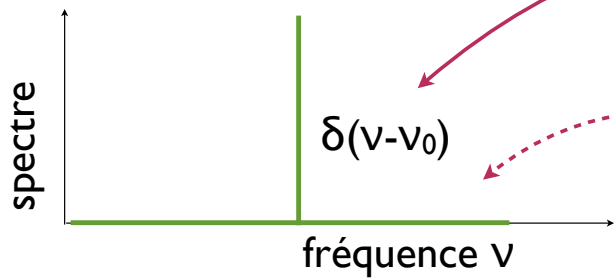
# Introduction

Source étendue ?

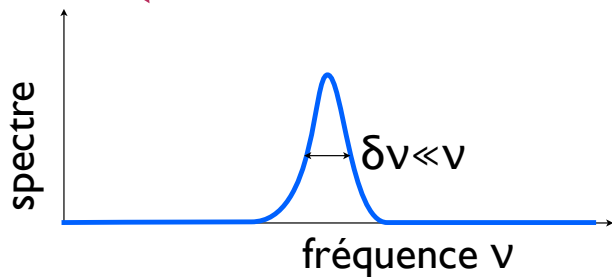
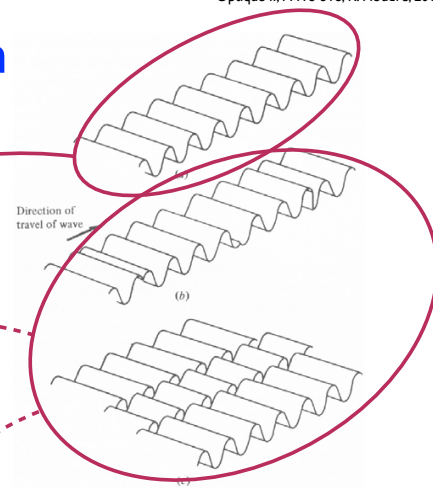


# Introduction

Relation avec la largeur spectrale ?



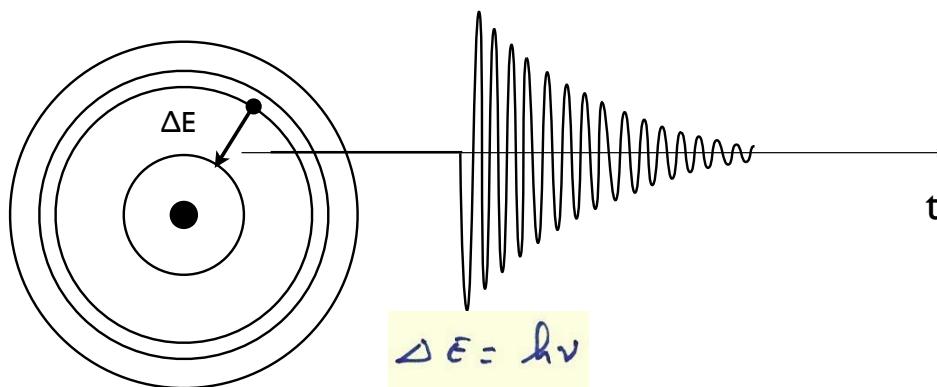
Onde monochromatique



Onde quasi-monochromatique

# Temps de cohérence

Durée finie de l'impulsion



atome

$$\Delta E = h\nu$$

$$\Delta E = \int_0^{\infty} P_r(t) dt$$

$$I(t) = \int I(\nu) e^{-2i\pi\nu t} d\nu$$

# Temps de cohérence

## Durée finie de l'impulsion

$$E(t) = e^{-2i\pi\nu_0 t} e^{-\frac{t}{2\tau_c}}$$

$$I(t) \propto e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

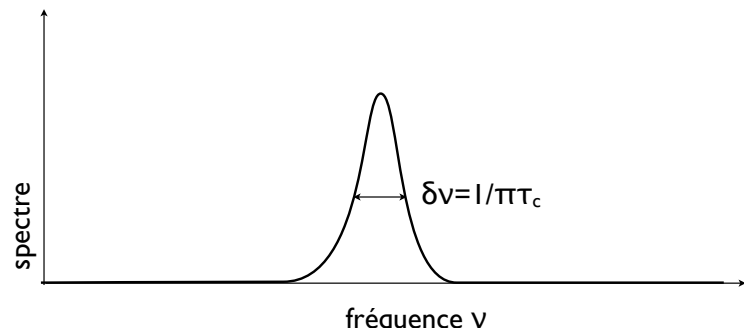
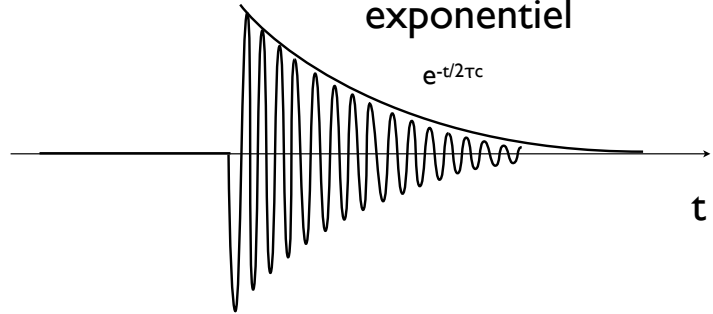
$$I(\nu) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 \tau_c^2 (\nu - \nu_0)^2}$$

$$\Delta\nu_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi\tau_c}$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{\pi\tau_c}$$



Amortissement exponentiel



# Temps de cohérence

## Trains d'impulsions

$$E(t) = e^{-2i\pi\nu_0 t} e^{-\frac{t}{2\tau_c}}$$

$$I(t) \propto e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

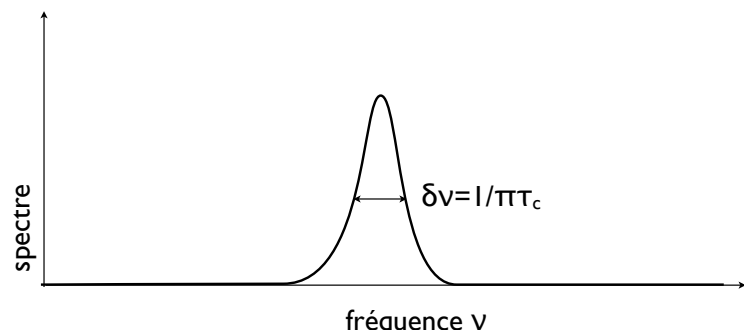
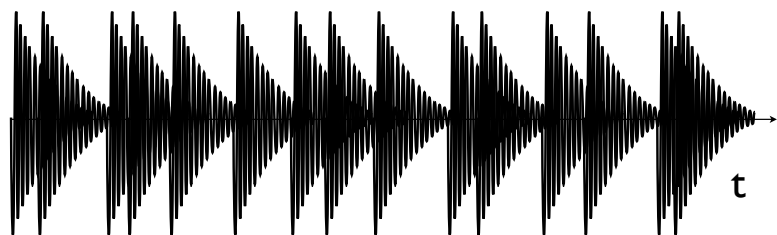
$$I(\nu) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 \tau_c^2 (\nu - \nu_0)^2}$$

$$\Delta\nu_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi\tau_c}$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{\pi\tau_c}$$



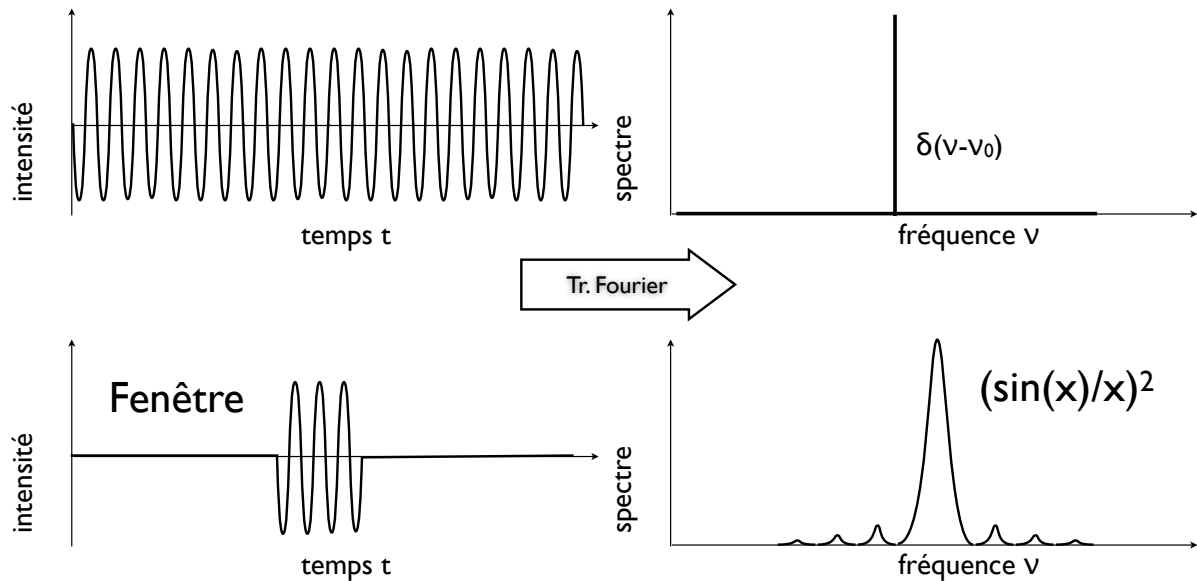
Amortissement exponentiel





# Temps de cohérence

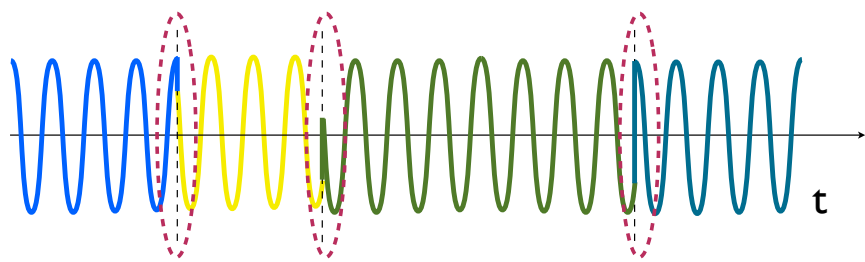
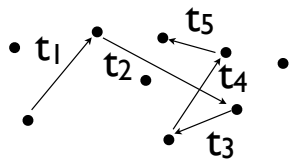
## Durée finie de l'impulsion



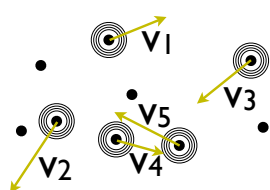
# Temps de cohérence

## Elargissement collisionnel

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi \langle \tau_{coll} \rangle}$$



## Elargissement Doppler



Distribution des vitesses  $\propto e^{-\frac{Av^2}{k_B T}}$

$$I(\nu) \propto e^{-\frac{(\nu-\nu_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{k_B T}{mc^2}} v_0$$

$$\Delta\nu = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma = \sqrt{\frac{8k_B T \ln 2}{mc^2}} v_0$$

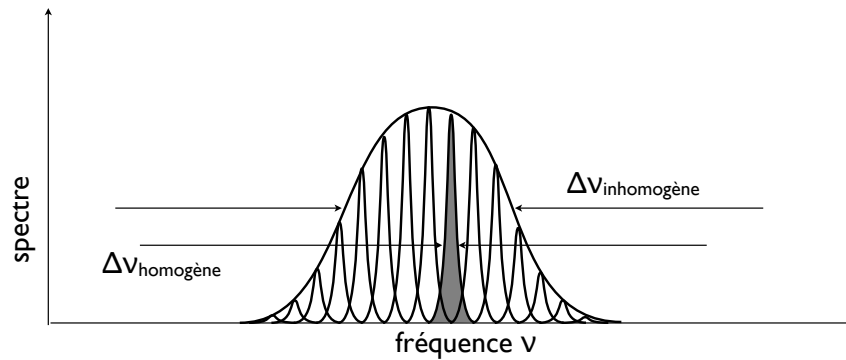
# Temps de cohérence

## Elargissement inhomogène

- Évènement physique
- Mécanisme
- Distribution statistique (spatiale et/ou temporelle) d'évènements

Elargissement homogène

Elargissement inhomogène

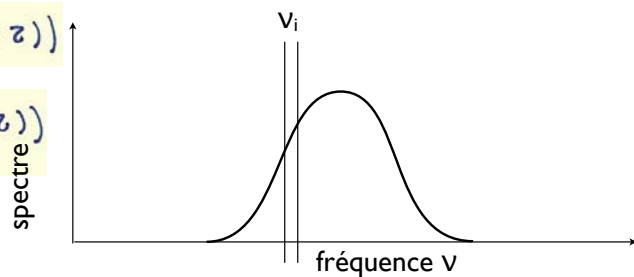


# Temps de cohérence

## Durée et longueur de cohérence

$$I_{\nu_i}(t) = 2 I_0(\nu_i) (1 + \cos(2\pi\nu_i t))$$

$$I = \sum_i 2 I_0(\nu_i) (1 + \cos(2\pi\nu_i t))$$



$$\Delta\phi = 2\pi \Delta\nu \tau(t)$$

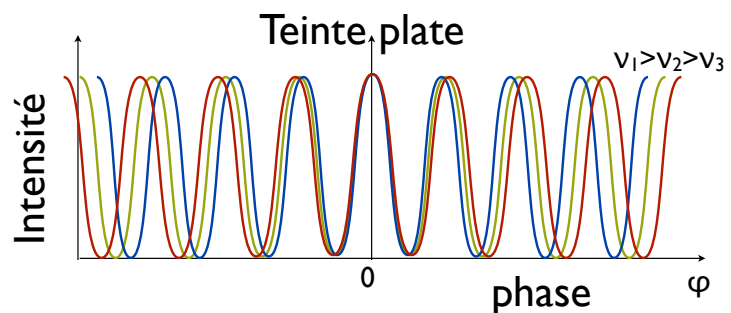
$$\tau < \tau_c$$

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu}$$

Temps de cohérence

$$L_c = c \tau_c$$

Longueur de cohérence



## Temps de cohérence

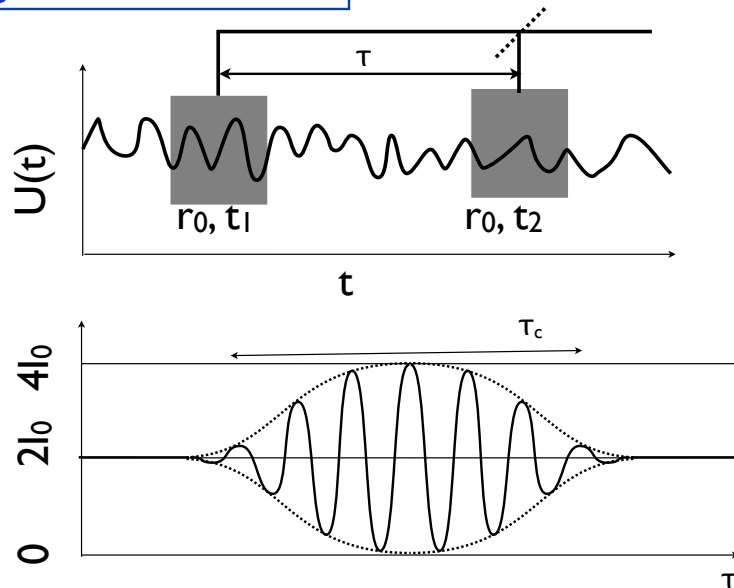
### Durée et longueur de cohérence

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu}$$

Temps de cohérence

$$L_c = c \tau_c$$

Longueur de cohérence



21

## Cohérence temporelle

### Degré complexe de cohérence temporelle

$$I_0 = \int I(\nu) d\nu \quad \text{Source quasi-monochromatique}$$

$$\begin{aligned} I &= \int 2 I(\nu) (1 + \cos(2\pi\nu\tau)) d\nu \\ &= 2 I_0 (1 + \int \frac{I(\nu)}{I_0} \cos(2\pi\nu\tau) d\nu) \\ &= 2 I_0 (1 + \int I^*(\nu) \cos(2\pi\nu\tau) d\nu) \end{aligned}$$

$$I^*(\nu) \in [0, 1] \quad \nu' = \nu - \nu_0 \quad \nu' \ll \nu_0$$

22

## Cohérence temporelle

### Degré complexe de cohérence temporelle

$$I = 2 I_0 \left( 1 + \int I^n(\nu) \cos(2\pi\nu\tau) d\nu \right)$$

$$\int I^n(\nu'+\nu_0) \cos(2\pi\nu\tau) d\nu = \int I^n(\nu'+\nu_0) \operatorname{Re} \left\{ e^{-2i\pi(\nu'+\nu_0)\tau} \right\} d\nu'$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ e^{-2i\pi\nu_0\tau} \int I^n(\nu') e^{-2i\pi\nu'\tau} d\nu' \right\}$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ e^{-2i\pi\nu_0\tau} \gamma_t(\tau) \right\}$$

$$\gamma_t(\tau) = \int I^n(\nu') e^{-2i\pi\nu'\tau} d\nu'$$

Degré complexe de cohérence temporelle

Théorème de Wiener-Khinchine : le degré de cohérence  $\gamma_t(\tau)$  et la densité spectrale normalisée  $I^n(\nu)$  sont conjugués de Fourier

23

## Cohérence temporelle

### Degré complexe de cohérence temporelle

$$\gamma_t(\tau) = \int I^n(\nu') e^{-2i\pi\nu'\tau} d\nu'$$

Pratiquement :

$$\gamma_t(\tau) = |\gamma_t(\tau)| e^{i\alpha\tau}$$

$$I(\tau) = 2I_0 \left( 1 + |\gamma_t(\tau)| \cos(2\pi\nu_0\tau - \alpha\tau) \right)$$

$$I_{\max} = 2I_0 (1 + |\gamma_t(\tau)|)$$

$$I_{\min} = 2I_0 (1 - |\gamma_t(\tau)|)$$

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\gamma_t(\tau)|$$

Visibilité = |degré complexe de cohérence temporelle|

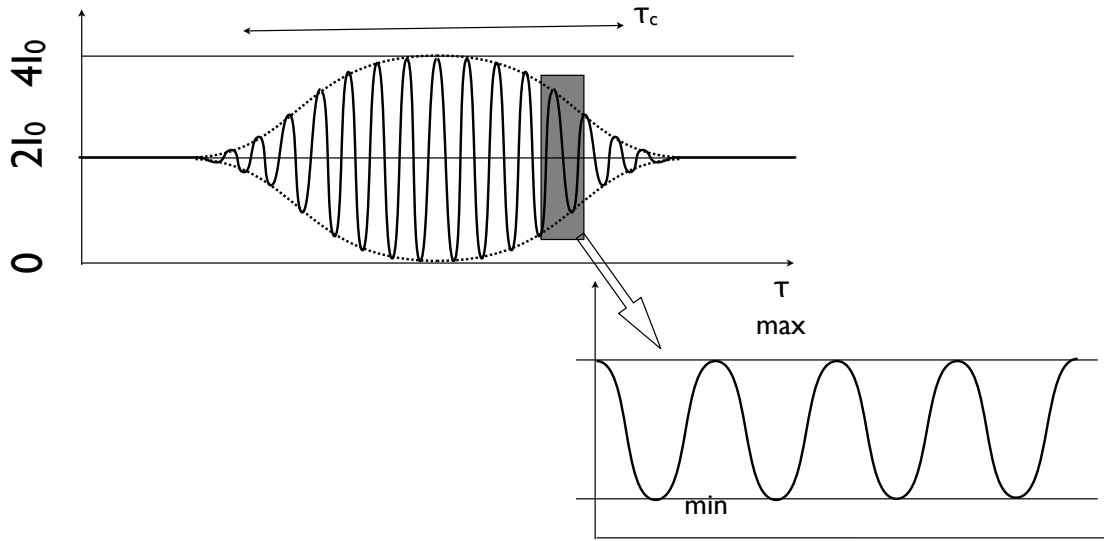
24

# Cohérence temporelle

## Degré complexe de cohérence temporelle

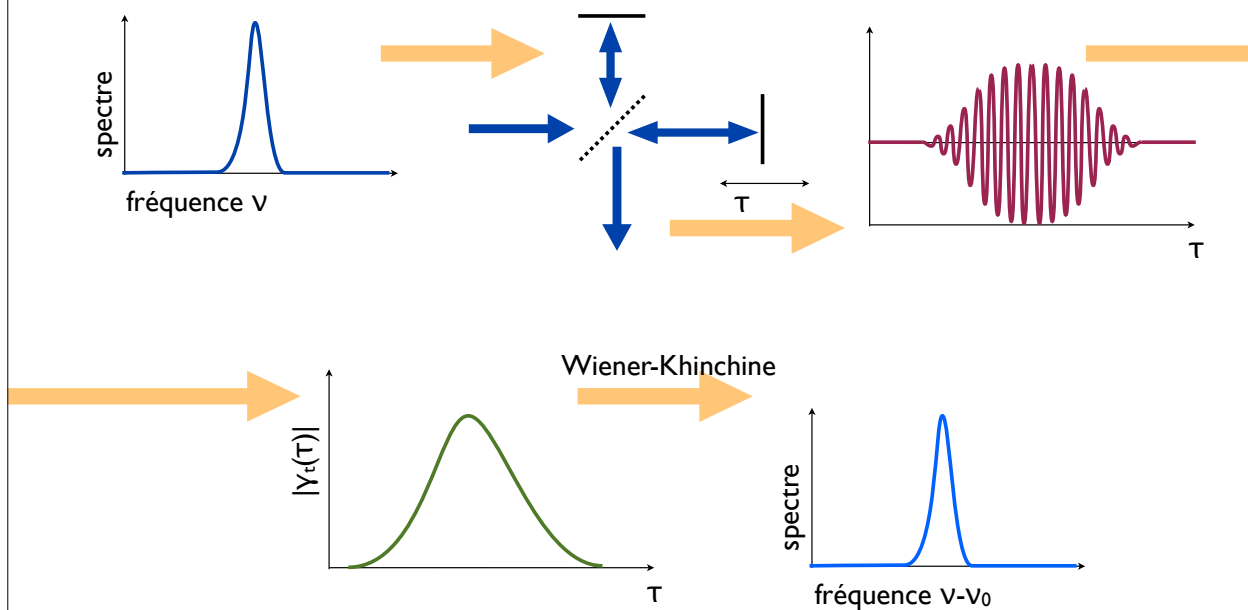
$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\gamma_t(\tau)|$$

Visibilité = |degré complexe de cohérence temporelle|



# Applications

## Spectromètre à transformée de Fourier

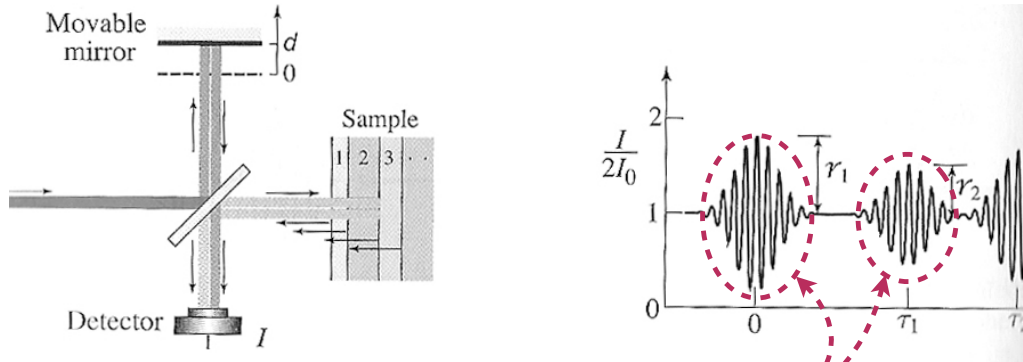


# Applications

## Tomographie cohérente

Images en coupe

Source de faible longueur de cohérence

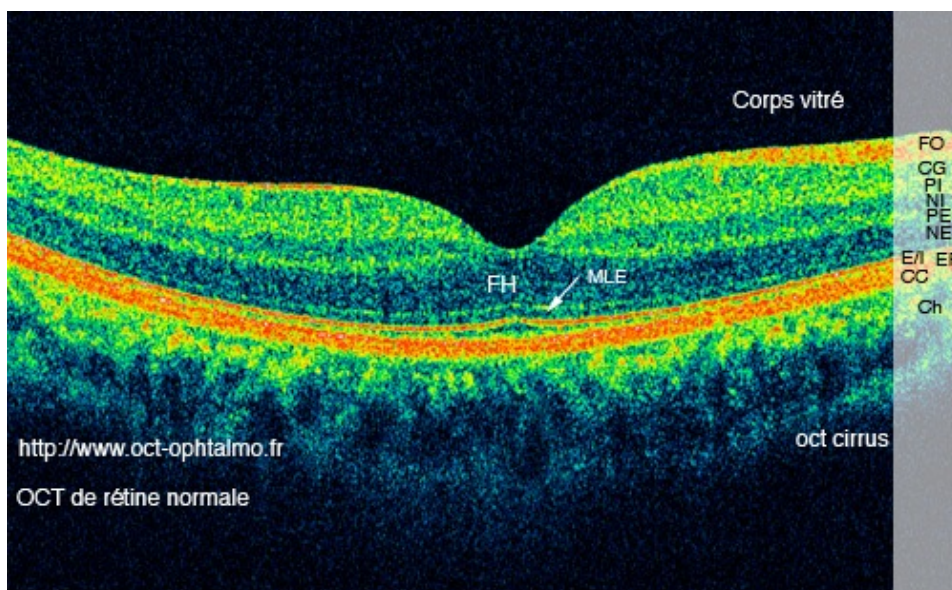


$$I(\tau) = \left\langle \left| U(t-\tau) + \sum_i r_i U(t-\tau_i) \right|^2 \right\rangle_\epsilon$$

$$= 2 I_0 \left( 1 + \sum_i r_i \operatorname{Re} \left\{ \gamma_{\tau}(\tau-\tau_i) \right\} + \sum_{i,j} r_i r_j^* \operatorname{Re} \left\{ \gamma_{\tau}(\tau_i-\tau_j) \right\} \right)$$

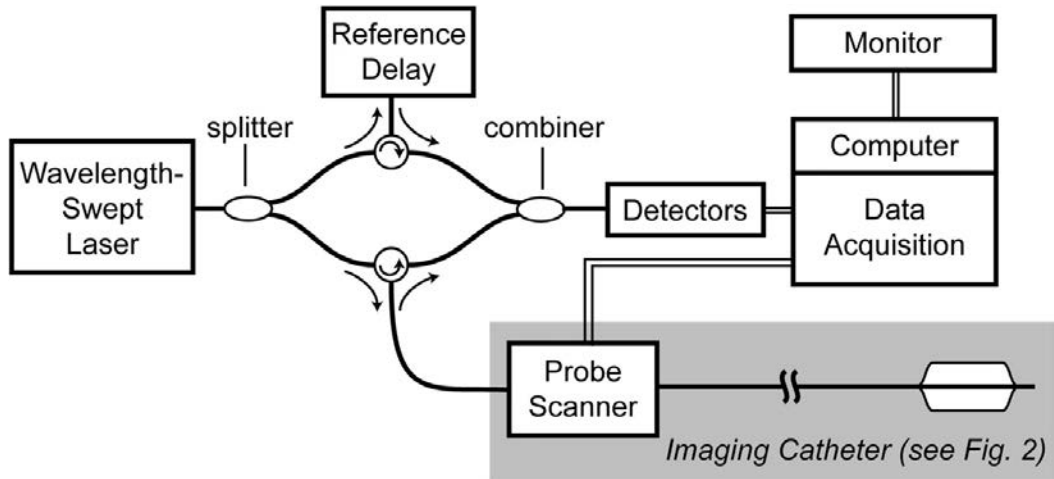
# Applications

## Tomographie cohérente



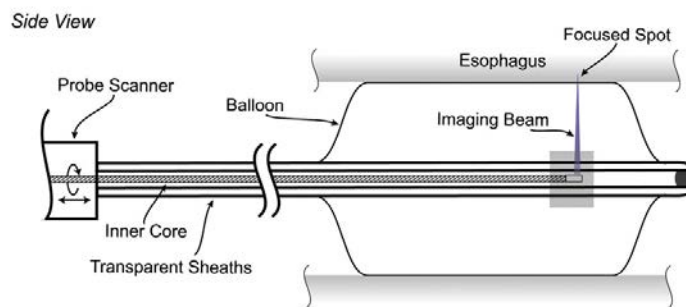
# Applications

## Tomographie cohérente



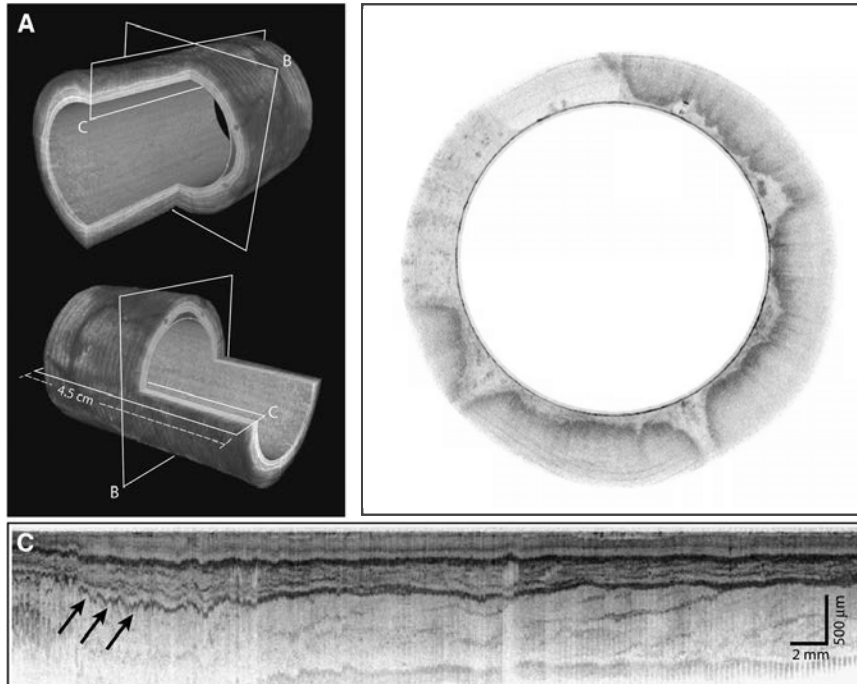
# Applications

## Tomographie cohérente



# Applications

## Tomographie cohérente



898 GASTROINTESTINAL ENDOSCOPY Volume 65, No. 6 : 2007 www.giejournal.org

31

## Cohérence temporelle, suite

Amplitude  $U(r, t)$

Intensité  $I(r, t) = |U(r, t)|^2$

Intensité moyenne

$$\langle I(r) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |U(r, t)|^2 dt$$

Fonction d'autocorrélation

$$g(\tau) = \langle U^*(r) U(r+\tau) \rangle_t \in \mathbb{C}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} U^*(r) U(r+\tau) dt$$

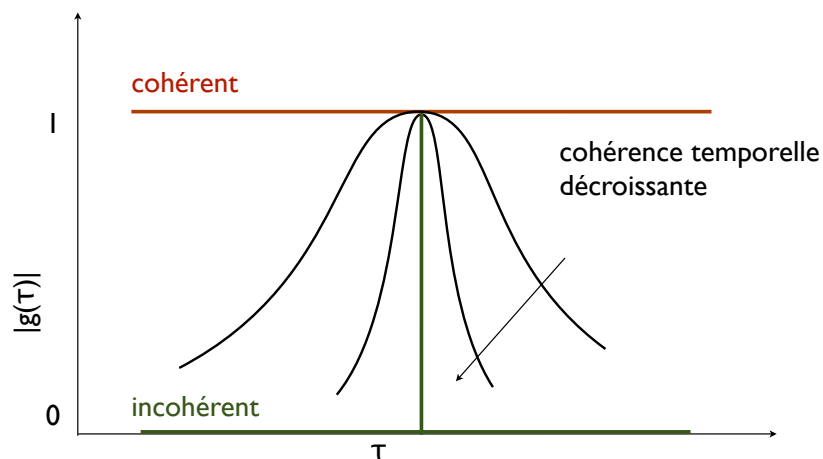
Degré complexe de cohérence temporelle

$$g = \frac{g(\tau)}{g(0)} = \frac{\langle U^*(r) U(r+\tau) \rangle}{\langle U^*(r) U(r) \rangle}$$

$g = 1$  cohérent  
 $g = 0$  incohérent



## Cohérence temporelle, suite



Exemple : onde harmonique

Degré complexe de cohérence temporelle

$$g(\tau) = \frac{\langle U^*(t) U(t+\tau) \rangle}{\langle U^*(t) U(t) \rangle}$$

$g = 1$  cohérent  
 $g = 0$  incohérent

$$A e^{i\omega t}$$

$$g(\tau) = e^{i\omega\tau}$$

$$|g(\tau)| = 1$$

33

## Cohérence temporelle, suite

Temps de cohérence

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)|^2 d\tau$$

Densité de puissance

$$V(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

$U_T(t)$  Fonction  $U$  tronquée entre  $[-T/2, +T/2]$

$V_T(\nu)$  T.F. de  $U_T$   $V_T(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$

$$S(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |V_T(\nu)|^2 \rangle$$

Densité de puissance spectrale

34

## Cohérence temporelle, suite

$$V_T(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \quad U_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_T(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_T^*(t) U_T(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} U_T^*(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} V_T(\nu) e^{i2\pi\nu(t+\tau)} d\nu \right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} U_T^*(t) e^{2i\pi\nu t} dt \right] V_T(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} V_T^*(\nu) V_T(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |V_T(\nu)|^2 e^{2i\pi\nu\tau} d\nu$$

$$\times \frac{1}{T} \\ T \rightarrow \infty$$

35

## Cohérence temporelle, suite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_T^*(t) U_T(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |V_T(\nu)|^2 e^{2i\pi\nu\tau} d\nu$$

$$\times \frac{1}{T} \\ T \rightarrow \infty$$

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu$$

**Théorème de Wiener-Khinchine, version 2**  
**G(τ) et S(ν) sont conjugués de Fourier**

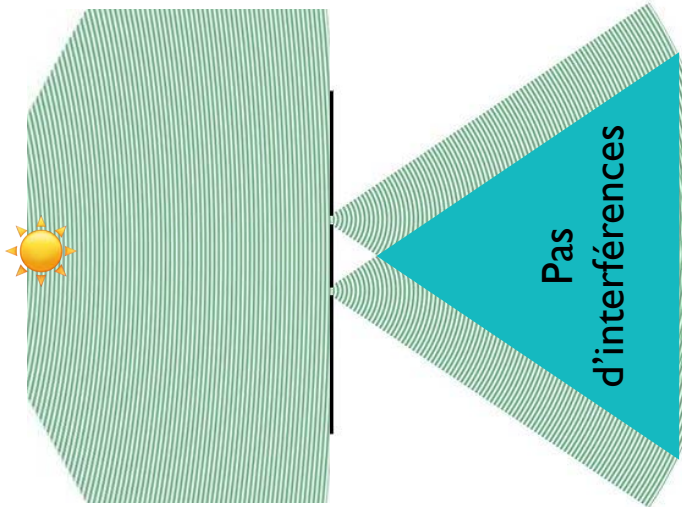
**G(τ) : fonction d'autocorrélation**

**S(ν) : densité spectrale de puissance**

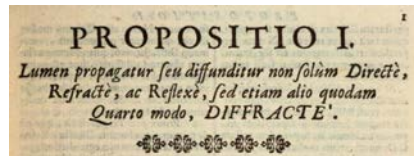
36

## Cohérence spatiale

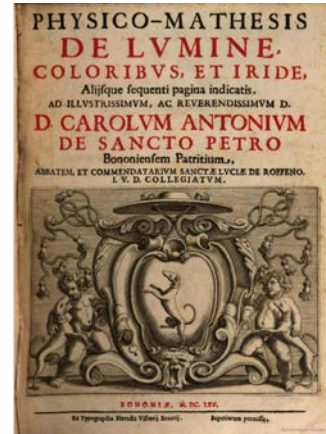
### Expérience de Grimaldi (ca. 1660)



Il est le premier à décrire les franges d'interférences engendrées par des ouvertures, fils, bord d'écran et à utiliser le mot diffraction.



Francesco Grimaldi  
1618-1663

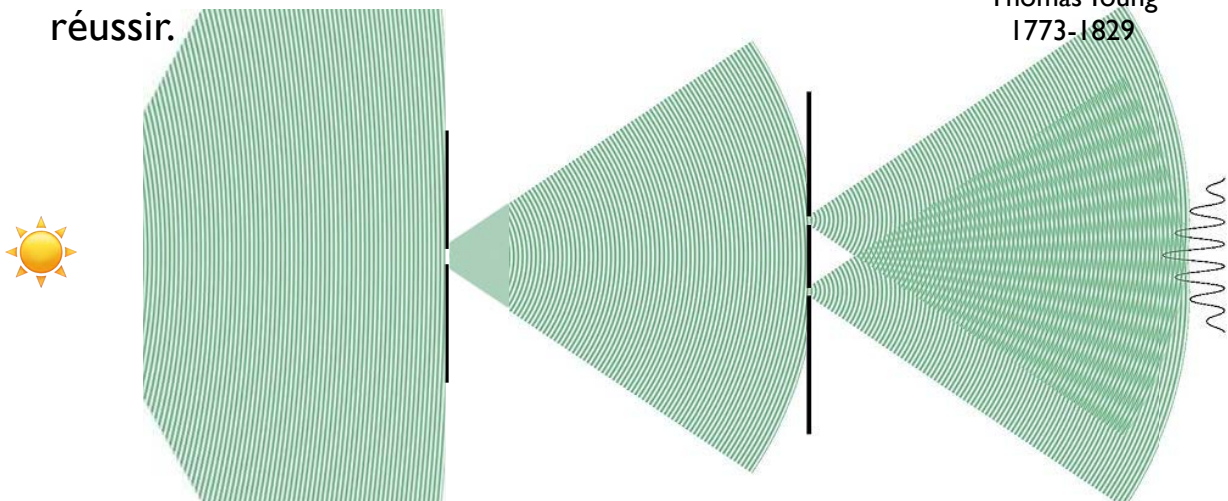


## Cohérence spatiale

### Expérience des fentes de Young

Pour obtenir une source ponctuelle, Young ajoute un premier trou et observe des interférences.

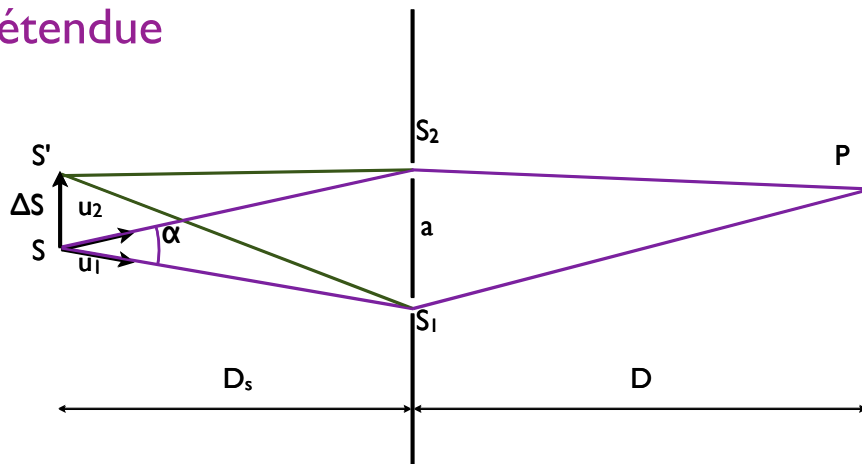
L'expérience de deux trous de Grimaldi peut réussir.



Thomas Young  
1773-1829

## Cohérence spatiale

### Source étendue



$$\Phi_1 = \frac{2\pi\nu}{c} \Delta L_1 = \frac{2\pi\nu}{c} (-SS_1P + SS_2P)$$

$$\Phi_2 = \frac{2\pi\nu}{c} \Delta L_2 = \frac{2\pi\nu}{c} (-S'S_1P + S'S_2P)$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{2\pi\nu}{c} \Delta L = \frac{2\pi\nu}{c} (S'S_2 - SS_2 - S'S_1 + SS_1)$$

39

## Cohérence spatiale

### Source étendue

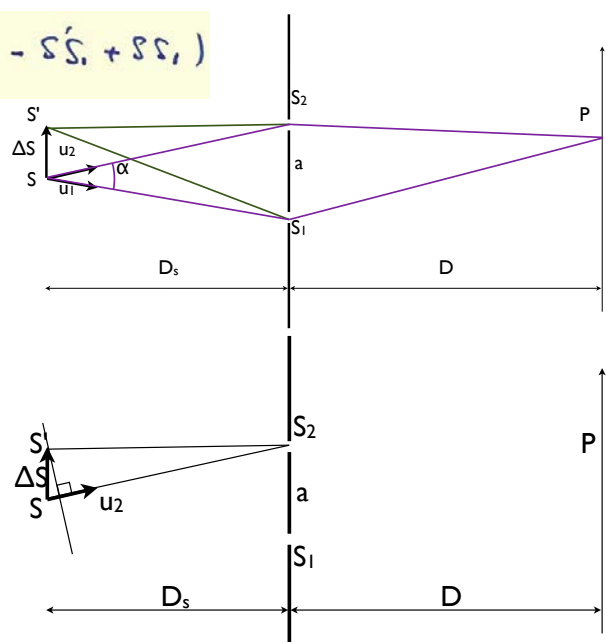
$$\Delta\Phi = \frac{2\pi\nu}{c} \Delta L = \frac{2\pi\nu}{c} (S'S_2 - SS_2 - S'S_1 + SS_1)$$

$\sin \alpha \approx \tan \alpha = \alpha$  Petits angles

$$S'S_2 - SS_2 = \vec{\Delta S} \cdot \vec{u}_2$$

$$S'S_1 - SS_1 = \vec{\Delta S} \cdot \vec{u}_1$$

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi\nu}{c} (\vec{\Delta S} \cdot \vec{u}_2 - \vec{\Delta S} \cdot \vec{u}_1) = \frac{2\pi\nu}{c} \vec{\Delta S} \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$$



40

## Cohérence spatiale

### Source étendue

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\nu}{c} \Delta S \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$$

- $\vec{\Delta S} \perp (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$

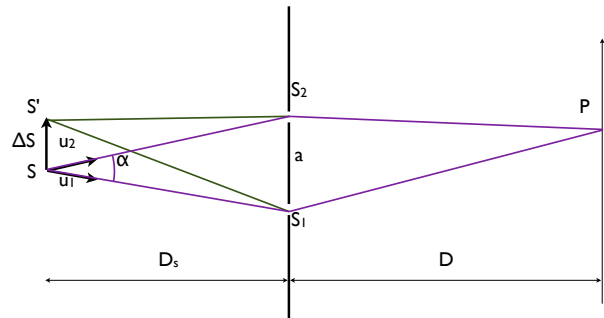
- $\vec{\Delta S} \parallel (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$

$$|u_2 - u_1| = \sin \alpha \quad \alpha = \frac{a}{D_s}$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\nu}{c} \Delta S \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{2\pi\nu}{c} \alpha \Delta S$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S \frac{a}{D_s}$$



41

## Cohérence spatiale

### Source étendue

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S \frac{a}{D_s}$$

$$I = \sum_i 2 I_0(\nu_i) (1 + \cos \phi_i)$$

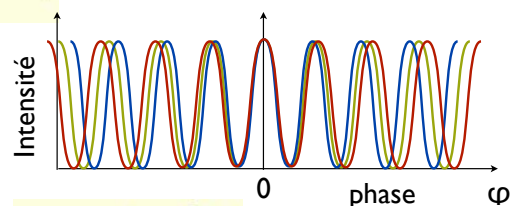
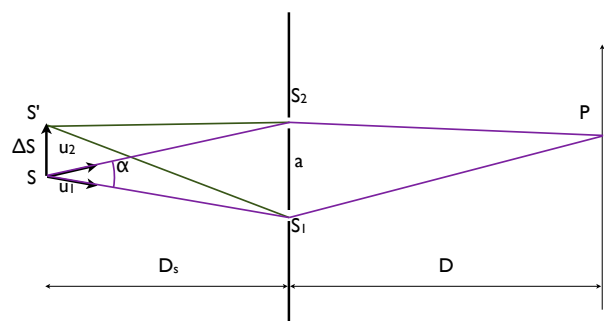
$$\phi_i = \frac{2\pi\nu}{c} (S(\nu_i) S_2 P - S(\nu_i) S_1 P)$$

Transition franges / pas de franges

$$\Delta\phi \approx 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S \frac{a}{D_s} \approx 2\pi$$

$$a_c = \lambda \frac{D_s}{\Delta S}$$



42

# Cohérence spatiale

## Source étendue

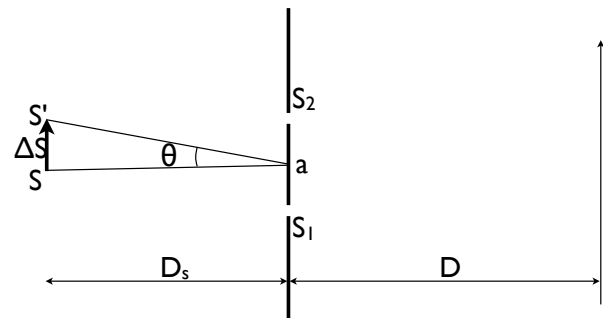
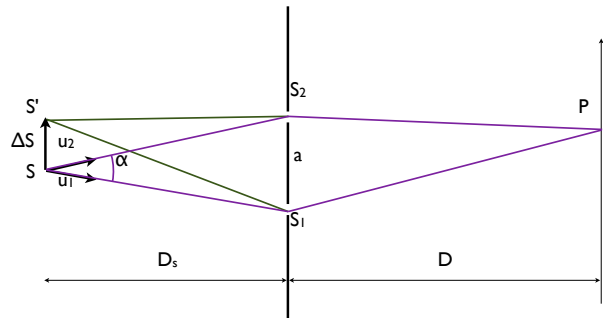
$$a_c = d \frac{D_s}{\Delta S} \approx \frac{\lambda}{\theta} \quad \theta = \frac{\Delta S}{D_s}$$

Longueur de cohérence spatiale

$a < a_c$  Spatialement cohérent

$a > a_c$  Spatialement incohérent

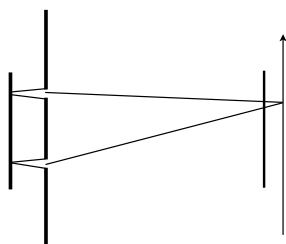
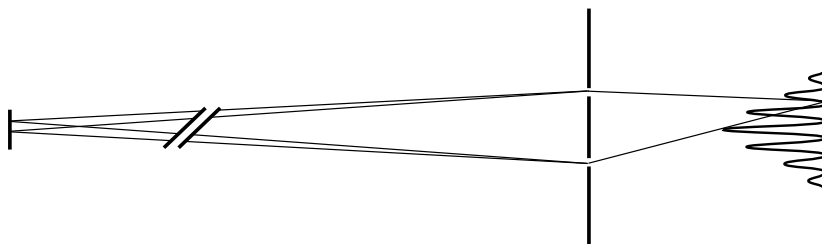
- Cohérence spatiale
- Source étendue
- Propagation
- Angle (solide) sous lequel la source est observée



43

# Introduction

## Source étendue ?



44

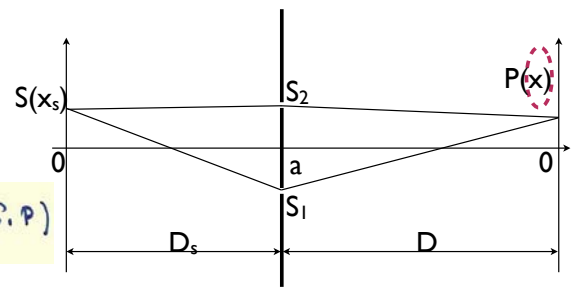
## Cohérence spatiale

$$I = \int 2 I_S(x_S) (1 + \cos(\varphi(x_S))) dx_S$$

$$\varphi = \varphi_S + \varphi_P = \frac{2\pi\nu}{c} (SS_2 - SS_1 + S_2P - S_1P)$$

$$\begin{aligned} \varphi_S &= \frac{2\pi}{\lambda} S_1 S(x_S) \vec{a}_x \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a x_S}{D_S} \end{aligned}$$

$$\varphi_P = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a x}{D}$$



$$I = 2 I_0 \left( 1 + \int \frac{I(x_S)}{I_0} \cos(\varphi_S + \varphi_P) dx_S \right)$$

$$= 2 I_0 \left( 1 + \int I_n(x_S) \cos(\varphi_S + \varphi_P) dx_S \right)$$

$$I_n(x_S) \in [0, 1]$$

Intensité spatiale normalisée

45

## Cohérence spatiale

$$I = 2 I_0 \left( 1 + \int I_n(x_S) \cos(\varphi_S + \varphi_P) dx_S \right)$$

idem ...

$$\text{Re} \left\{ e^{-i\varphi_P} \int I_n(x_S) e^{-i\varphi_S} dx_S \right\} = \text{Re} \left\{ \gamma_S e^{-i\varphi_P} \right\}$$

$$\gamma_S(u) = \int I_n(x_S) e^{-2i\pi u x_S} dx_S$$

$$u = \frac{a}{\lambda D_S} = \frac{\theta_S}{\lambda}$$

Degré complexe de cohérence spatiale

Théorème de Zernike et Van Cittert :  
 $\gamma_S(u)$  et  $I_n(x_S)$  sont conjugués de Fourier

46

## Cohérence spatiale

$$\gamma_S(u) = \int I_n(x_S) e^{-2i\pi u x_S} dx_S$$

$$u = \frac{\alpha}{h D_S} = \frac{\theta_S}{\lambda}$$

Pratiquement :

$$I(u) = 2I_0 (1 + |\gamma_S(u)| \cos(\varphi_p - \alpha_S))$$

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\gamma_S(u)|$$

Visibilité = |degré complexe de cohérence spatiale|

$$\boxed{I_{x=cst}(u)} \quad \boxed{I_{\alpha=cst}(x)} \quad \varphi_p = 2\pi \frac{\alpha x}{h D} = 2\pi u x \frac{D}{D_S}$$



Frits Zernike  
1888-1966

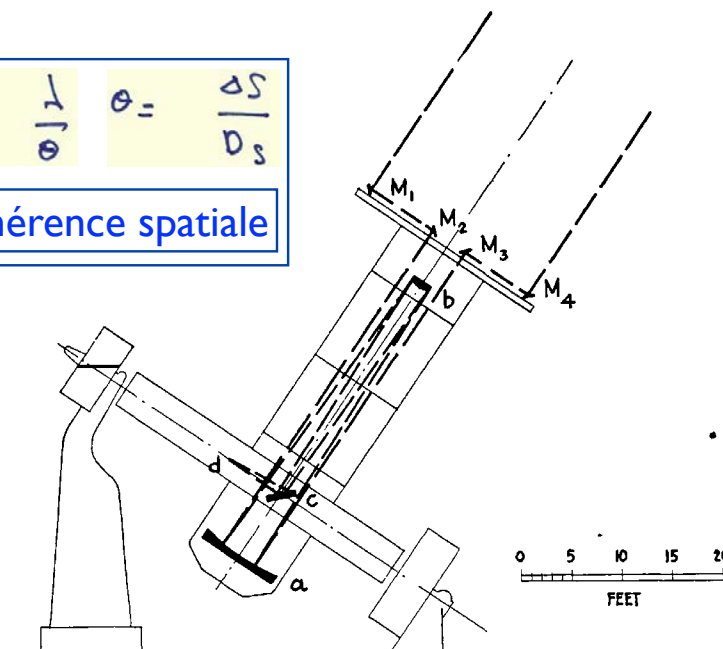
47

## Applications

### Télescope à synthèse d'ouverture

$$a_c = d \frac{D_S}{\Delta S} \approx \frac{\lambda}{\theta} \quad \theta = \frac{\Delta S}{D_S}$$

Longueur de cohérence spatiale



A. Michelson et F.G. Pease, Astrophysical Journal, 53, 249 (1921)

48



## Applications

### Télescope à synthèse d'ouverture

Initialement proposé par H. Fizeau en 1860

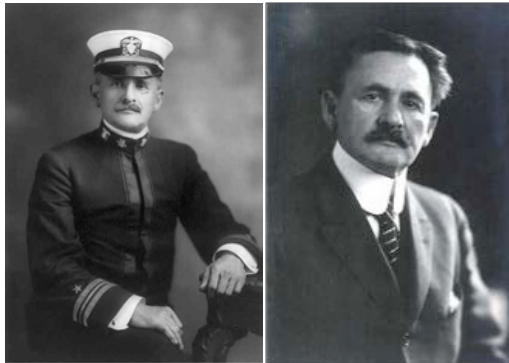
Ré-initié par A. Michelson en 1890

Première mesure sur  $\alpha$ -Orion (Bételgeuse)  
en 1920-1921 par A. Michelson et F.G. Pease



H. Fizeau 1819-1896

$$\Delta\theta = 0.047 \text{ arcsec}$$



A. Michelson 1852-1931



F.G. Pease 1881-1938



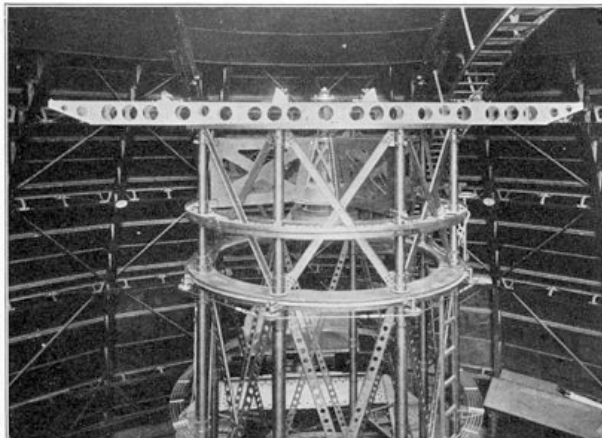
$\alpha$ -Orion

49

## Applications

### Télescope à synthèse d'ouverture

Interféromètre sur le télescope  
Hooker de 2,5 m au Mt Wilson



ca. 1920



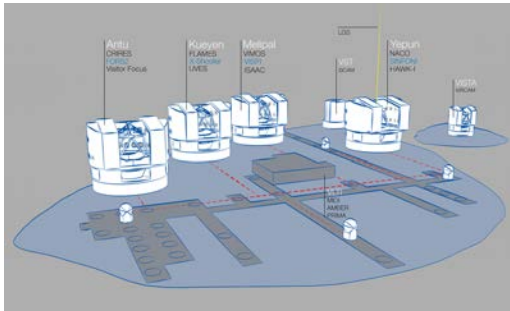
50

# Applications

## Télescope à synthèse d'ouverture



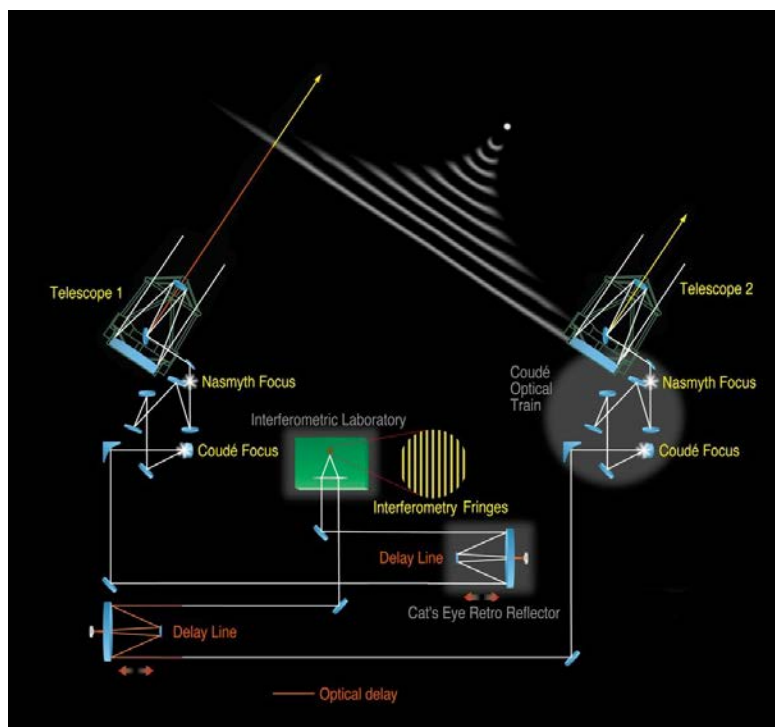
VLT Mont Paranal, Chili



Source ESO / Wikipedia

# Applications

## Télescope à synthèse d'ouverture

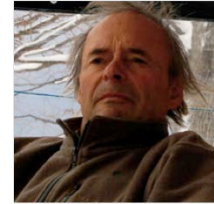


## Applications

### Télescope à synthèse d'ouverture

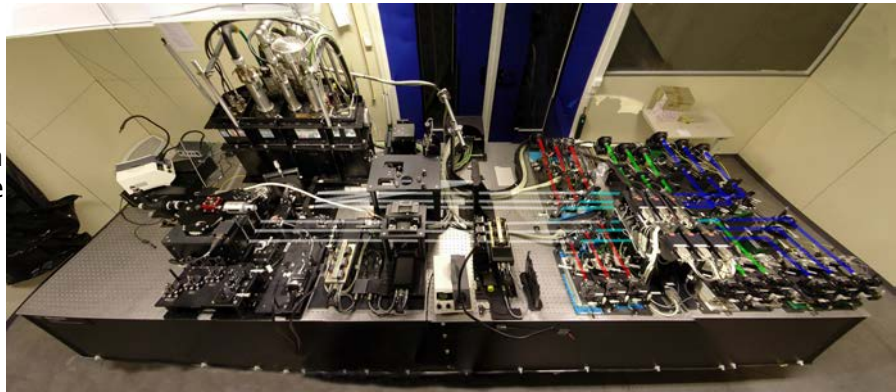


Un des pionniers de l'astronomie interférométrique



Antoine Labeyrie  
né en 1943

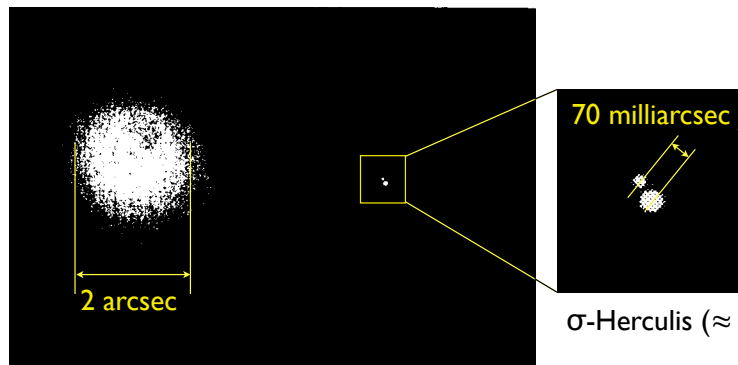
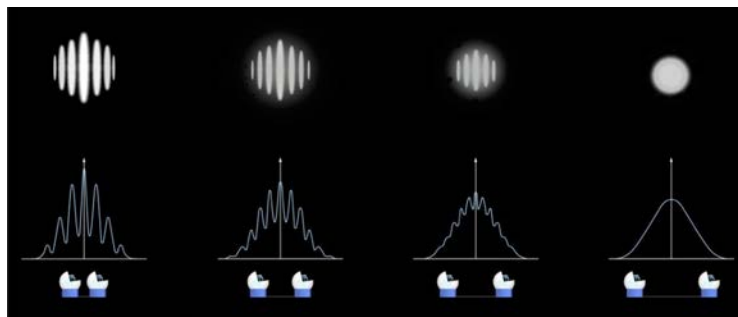
L'interféromètre AMBER :  
3 télescopes @ 1 - 2,4  $\mu\text{m}$   
Haute résolution angulaire  
et spectroscopie  
simultanées.



Source ESO / Wikipedia

## Applications

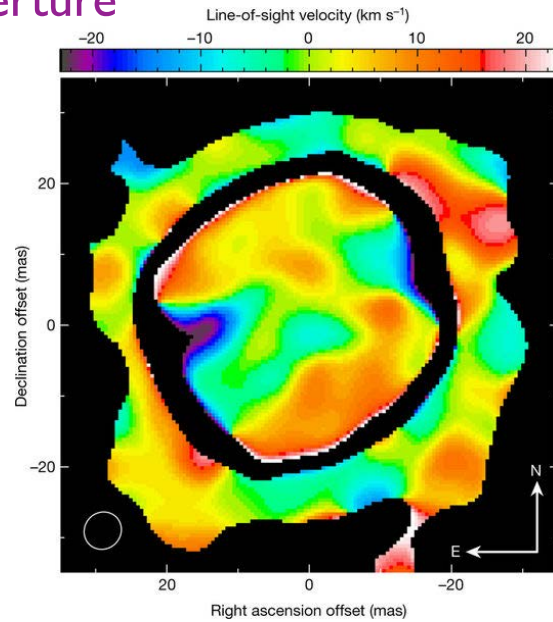
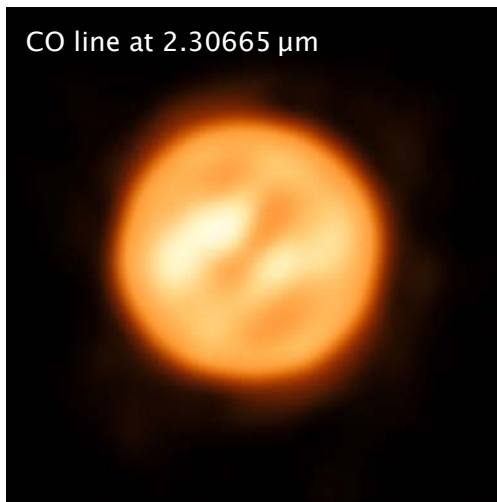
### Télescope à synthèse d'ouverture



$\sigma$ -Herculis ( $\approx 300$  a.l.)

## Applications

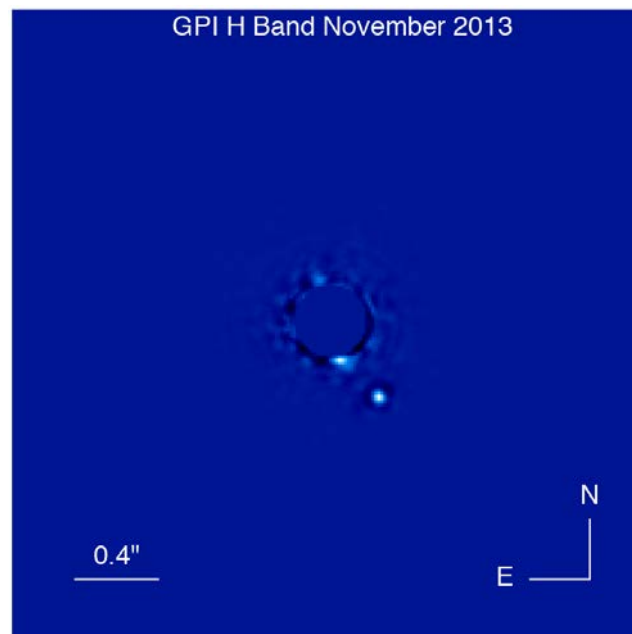
### Télescope à synthèse d'ouverture



Antarès (super géante rouge @ 550 années-lumière, diamètre 37 millarcsec)  
 Quatre télescopes, télescope équivalent 82 m  
 Source ESO / K.Ohnaka (2017)

VLT Mont Paranal, Chili

55



$\beta$ -Pictoris Gemini planet imager (optique adaptative)

56

## Applications

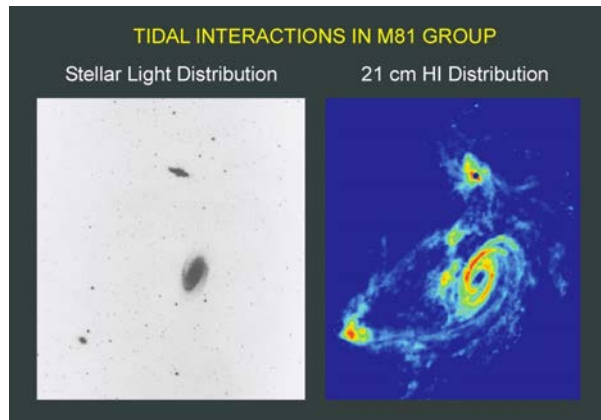
### Synthèse d'ouverture en radioastronomie



VLA, Socorro, Nouveau Mexique.  
27 radiotélescopes, ligne de base  
32 km.  
Résolution 0,05" à  $\lambda = 7$  mm.



VLBA, 10 radiotélescopes,  
ligne de base 8611 km.



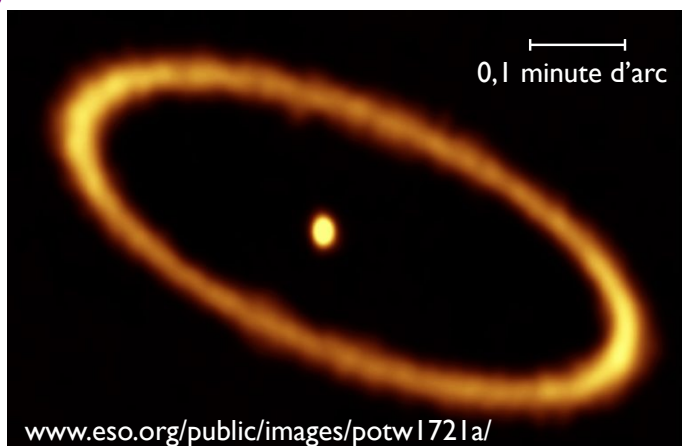
Champ 2X2° Image courtesy of NRAO/AUI

57

Optique II, PHYS-318, R. Houdré, 2017-2018

## Applications

### Synthèse d'ouverture en radioastronomie



Anneau de débris  
autour de Fomalhaut  
25 années lumières

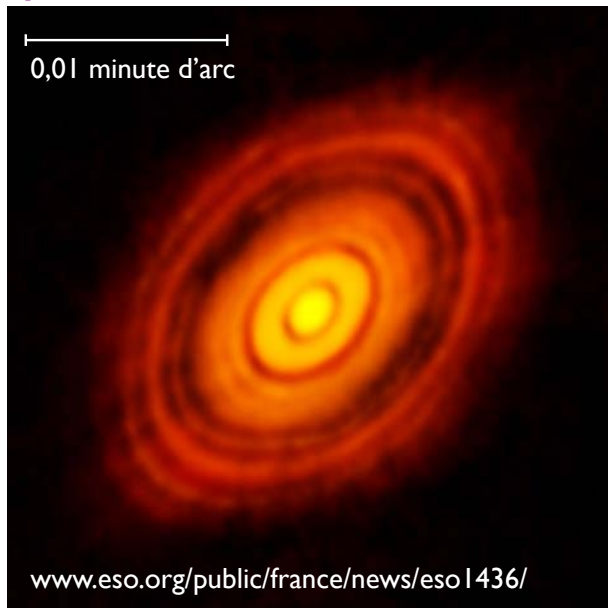


ALMA Atacama, Chili

58

## Applications

### Synthèse d'ouverture en radioastronomie



Protoplanètes en formation dans HL Tauri (450 années lumière).

Résolution angulaire  $\approx$  35 milliarcsecondes.

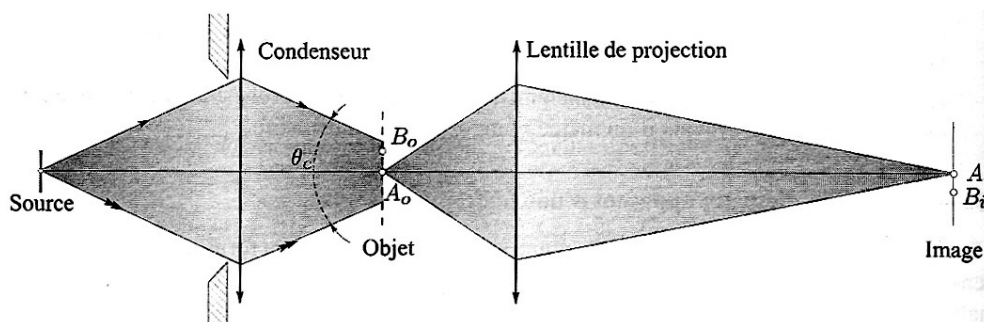
Dimension  $\approx$  3 X système solaire.

ALMA Atacama, Chili

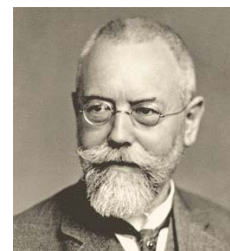
59

## Applications

### Cohérence spatiale et illumination d'un microscope



Illumination de Köhler



A. Köhler (1866-1948)

60

# Applications

## Cohérence spatiale et illumination d'un microscope

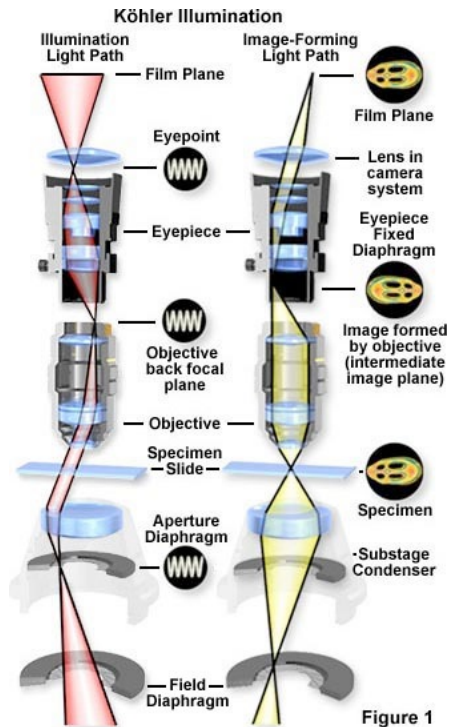


Figure 1

## Approches plus formelles de la cohérence

### Synthèse

Fonction de cohérence mutuelle

$$G(r_1, r_2, z) = \langle U^*(r_1, t) U(r_2, t+z) \rangle$$

$$G(r, r, 0) = I(r) \quad \text{Intensité}$$

$$G(r, r, z) \quad \text{Autocorrélation temporelle}$$

Degré complexe de cohérence

$$g(r_1, r_2, z) = \frac{G(r_1, r_2, z)}{\sqrt{G(r_1, r_1, 0) G(r_2, r_2, 0)}} = \frac{G(r_1, r_2, z)}{\sqrt{I(r_1) I(r_2)}}$$

Intensité mutuelle

$$G(r_1, r_2, 0)$$

Normalisée

$$g(r_1, r_2) = g(r_1, r_2, z=0) = \frac{G(r_1, r_2, 0)}{\sqrt{I(r_1) I(r_2)}}$$

## Approches plus formelles de la cohérence

### Synthèse

#### Interférences

$$\begin{aligned}
 I &= \langle |U_1 + U_2|^2 \rangle \\
 &= \langle |U_1|^2 \rangle + \langle |U_2|^2 \rangle + \langle U_1^* U_2 \rangle + \langle U_1 U_2^* \rangle \\
 &= I_1 + I_2 + G_{12} + G_{12}^* \\
 &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |g_{12}| \cos \varphi
 \end{aligned}$$

$$g_{12} = |g_{12}| e^{i\varphi} \quad \text{Degré complexe de cohérence}$$

#### Visibilité

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |g_{12}|$$

$$I_1 = I_2 \quad V = |g_{12}|$$

## Approches plus formelles de la cohérence

### Synthèse

$$|g_{12}| = 1 \quad \text{Cohérent}$$

$$g_{12} = 0 \quad \text{Incohérent}$$

Cas ondes harmoniques corrélées

$$g_{12} = \frac{\langle A^* e^{-i\omega t} A e^{i\omega t + \varphi} \rangle}{|A|^2} = e^{i\varphi}$$

$$\text{Cohérence temporelle} \quad U_1 = U_2 = U(r, t)$$

$$\text{Cohérence spatiale} \quad U_1 = U(r_1, 0) \quad U_2 = U(r_2, 0)$$



# Approches plus formelles de la cohérence

## Synthèse

### Moments d'ordre supérieurs de la fonction de cohérence

Intensité  $I = \langle U^* U \rangle$  Autocorrélation à  $\tau = 0$

Corrélation 1<sup>er</sup> ordre Corrélations d'amplitude

$$G^{(1)}(r_1, r_2, \tau) = \langle U^*(r_1, t) U(r_2, t + \tau) \rangle$$

Corrélation 2<sup>ème</sup> ordre Corrélations d'intensité

$$G^{(2)} = \langle U^*(r_1, t_1) U^*(r_2, t_2) U(r_3, t_3) U(r_4, t_4) \rangle$$

$$= \langle U^*(r_1, t_1) U^*(r_2, t_1 + \tau_2) U(r_3, t_1 + \tau_3) U(r_4, t_1 + \tau_4) \rangle_t$$

$$r_1 = r_2 \quad t_1 = t_2 = t$$

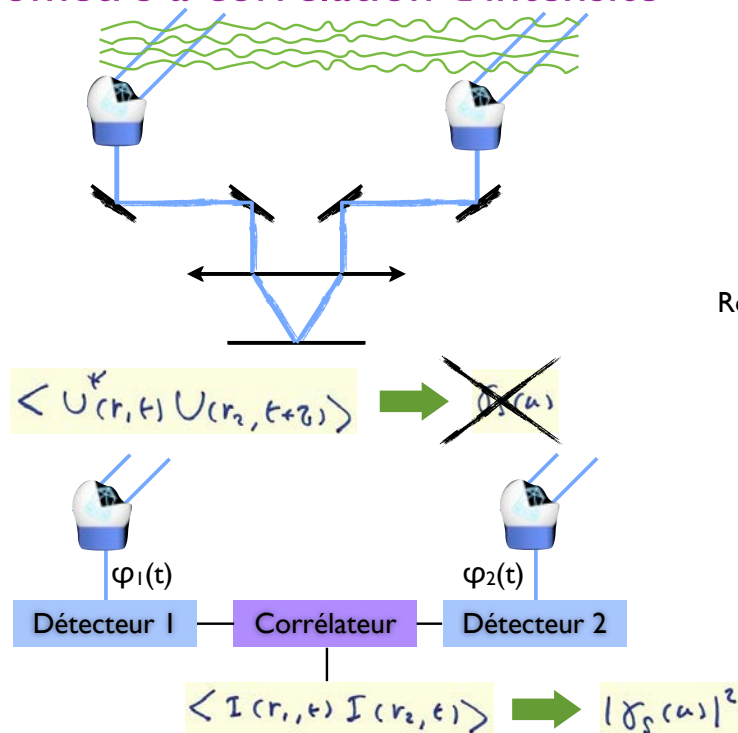
$$G^{(2)}(r_1, r_1, r_2, r_2, 0, \tau, \tau) = \langle |U(r_1, t)|^2 |U(r_2, t + \tau)|^2 \rangle_t$$

$$r_3 = r_4 \quad t_3 = t_4 = t + \tau$$

$$= \langle I(r_1, t) I(r_2, t + \tau) \rangle_t$$

## Applications

### Interféromètre à corrélation d'intensité



Robert Hanbury Brown  
1916-2002



Richard Q. Twiss  
1920-2005



Narrabri Stellar Intensity Interferometer

## Polarisation partielle

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i(\omega t + \varphi_x)} \\ E_{0y} e^{i(\omega t + \varphi_y)} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_x - \varphi_y \equiv 0 \text{ } [\pi]$$

$$\varphi_x - \varphi_y \equiv \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$$

Polarisation linéaire

Polarisation circulaire

Polarisation elliptique

∃ combinaison de lames quart d'onde et demi onde puis un polariseur linéaire qui donnera une transmission variant entre 0 et 1

Lumière non polarisée

Lumière partiellement polarisée

Polarisation circulaire vs. non polarisé ?

Polarisation partielle ?

# Polarisation partielle

**Cohérence spatiale**

**Cohérence temporelle**

**Degré de polarisation**

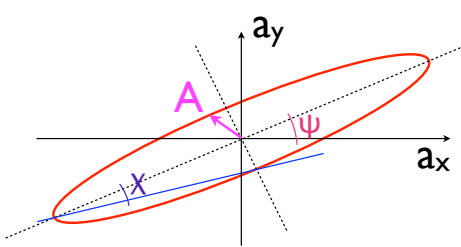
Point commun : existe t'il des corrélations entre deux parties différentes de l'onde (r, t ou composante sur x et y) ?

# Polarisation partielle

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i(\omega t + \phi_x)} \\ E_{0y} e^{i(\omega t + \phi_y)} \end{pmatrix}$$

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\phi_x} \\ E_{0y} e^{i\phi_y} \end{pmatrix}$$

Vecteur de Jones



$\chi=0 \quad \psi \equiv 0 \text{ [}\pi\text{]}$  Polarisation linéaire  $\pi_x$

$\chi=0 \quad \psi \equiv \frac{\pi}{2} \text{ [}\pi\text{]}$  Polarisation linéaire  $\pi_y$

$\chi \equiv \frac{\pi}{4} \text{ [}\frac{\pi}{2}\text{]}$  Polarisation circulaire  $\sigma_+, \sigma_-$

Polarisation elliptique

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_{0x} e^{i(\omega t + \phi_x)} \\ A_{0y} e^{i(\omega t + \phi_y)} \end{pmatrix}$$

$$r = \frac{A_{0y}}{A_{0x}} \quad \phi = \phi_y - \phi_x$$

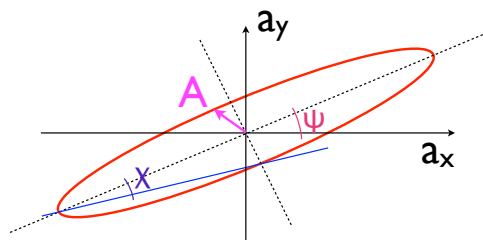
$$J = |A_{0x}|^2 + |A_{0y}|^2$$

$$\sigma_p = r e^{i\phi}$$

Taux de polarisation complexe

## Polarisation partielle

### Etat de polarisation

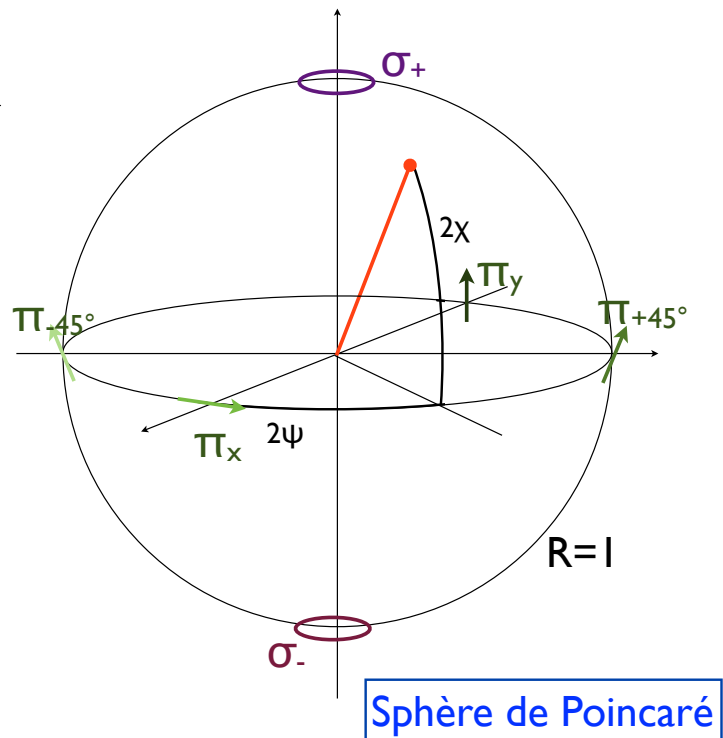


Polarisation elliptique

$$r = \frac{A_{0y}}{A_{0x}} \quad \varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

$$\tan 2\psi = \frac{2r}{1-r^2} \cos \varphi$$

$$\tan 2\chi = \frac{2r}{1+r^2} \sin \varphi$$



71

## Polarisation partielle

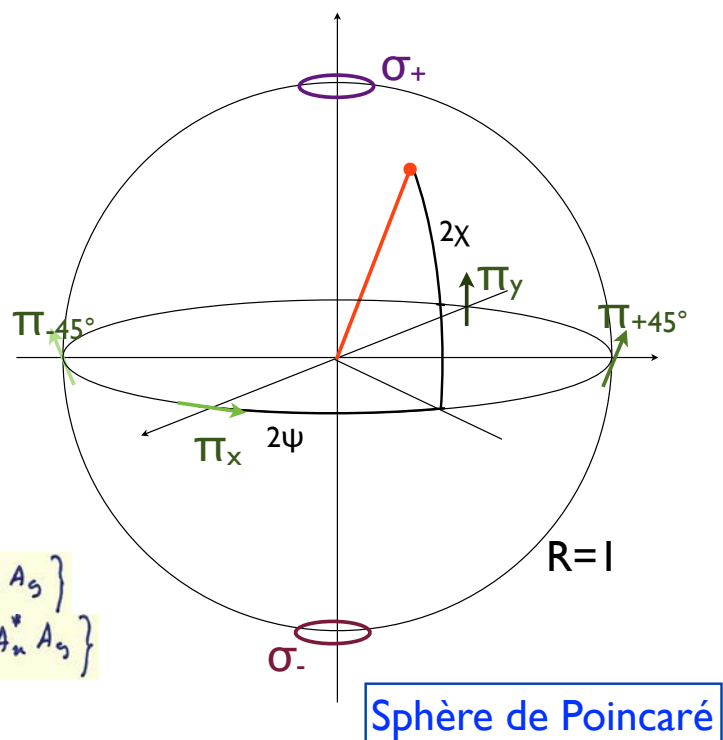
### Etat de polarisation

$$\begin{aligned} S_0 &= |A_{0x}|^2 + |A_{0y}|^2 \\ S_1 &= S_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \\ S_2 &= S_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \\ S_3 &= S_0 \sin 2\chi \end{aligned}$$

### Paramètres de Stokes

$$\begin{aligned} S_0 &= |A_{0x}|^2 + |A_{0y}|^2 \\ S_1 &= |A_{0x}|^2 - |A_{0y}|^2 \\ S_2 &= 2 A_{0x} A_{0y} \cos \varphi = 2 \operatorname{Re} \{ A_{0x}^* A_{0y} \} \\ S_3 &= 2 A_{0x} A_{0y} \sin \varphi = 2 \operatorname{Im} \{ A_{0x}^* A_{0y} \} \end{aligned}$$

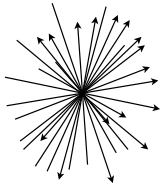
$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$



72

## Polarisation partielle

### Matrice de cohérence



$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix}$$

$$G_{xx}(z) = \langle U_x^*(t) U_x(t+z) \rangle$$

$$G_{yy}(z) = \langle U_y^*(t) U_y(t+z) \rangle$$

$$G_{xy}(z) = \langle U_x^*(t) U_y(t+z) \rangle$$

### Onde monochromatique

$$G_{xx}(z) = G_{yy}(z) = |A(z)|^2 e^{i\omega z}$$

$$G_{xx}(0) = G_{xx} = I_x$$

$$G_{yy}(0) = G_{yy} = I_y$$

$$G_{xy}(0) = G_{yx} = G_{yx}^*$$

$$G = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{bmatrix}$$

Matrice de cohérence

$$\text{tr}(G) = I$$

73

## Polarisation partielle

### Matrice de cohérence

$$G = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{bmatrix}$$

Matrice de cohérence

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} U_{0x} \\ U_{0y} \end{pmatrix}$$

Vecteur de Jones

$$G = \begin{bmatrix} \langle U_x^* U_x \rangle & \langle U_x^* U_y \rangle \\ \langle U_y^* U_x \rangle & \langle U_y^* U_y \rangle \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} U_x^* \\ U_y^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} \right\rangle = \langle J^* J \rangle$$

$$J' = T J$$

Élément optique (polariseur, lame retardatrice, ...)

$$G' = \langle (T J)^* (T J) \rangle = \langle T^* J^* J T \rangle = T^* G T$$

74

## Polarisation partielle

$$S_0 = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}$$

$$S_1 = \epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}$$

$$S_2 = 2 \operatorname{Re}\{\epsilon_{xy}\}$$

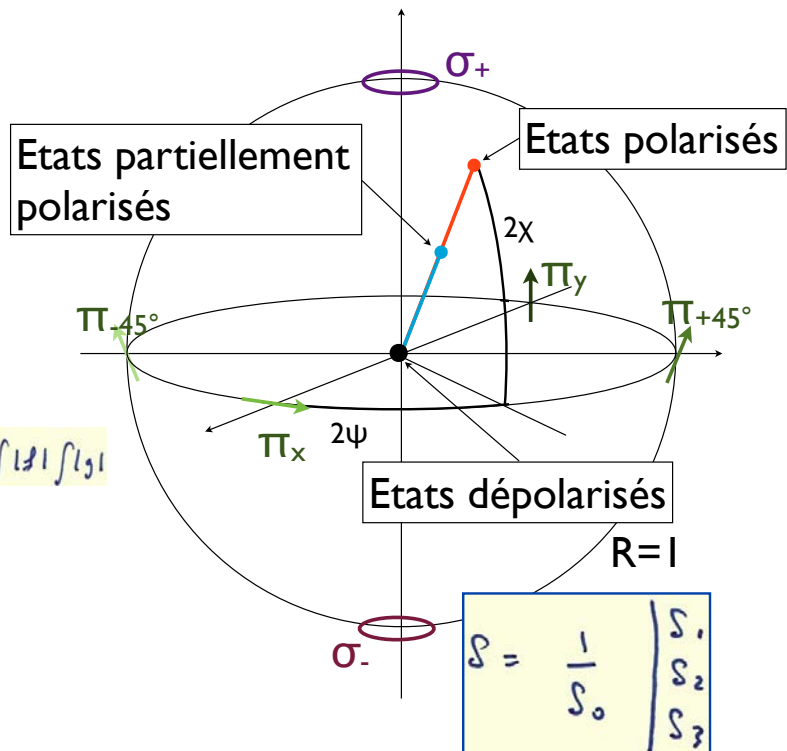
$$S_3 = 2 \operatorname{Im}\{\epsilon_{xy}\}$$

$$S_i \in \mathbb{R}$$

$$\int |f|^2 \leq \int |f|^2 \int |g|^2 \leq \int |f| \int |g|$$

$$|\epsilon_{xy}|^2 \leq \epsilon_{xx} \epsilon_{yy}$$

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$



## Polarisation partielle

### Exemples

Polarisation linéaire  $\pi_x$

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Polarisation linéaire  $\pi_{+45^\circ}$

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Polarisation circulaire  $\sigma_+$

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Non polarisé

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \sqrt{1 - \frac{\epsilon \det(A)}{\operatorname{tr}(A)}} = \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{S_0}} \quad P \in [0, 1] \quad \text{Degré de polarisation}$$

Polarisation circulaire vs. non polarisé  
Polarisation partielle

Existence ou non de  
corrélations entre  $E_x$  et  $E_y$

## Polarisation partielle

### Analogies avec l'opérateur densité de la mécanique quantique

Etat pur

Mélange cohérent

Polarisation linéaire  $\pi_x$   $|\varepsilon_x\rangle$   $\rho = |\varepsilon_x\rangle\langle\varepsilon_x|$   $\rho_{\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Polarisation linéaire  $\pi_y$   $|\varepsilon_y\rangle$   $\rho = |\varepsilon_y\rangle\langle\varepsilon_y|$   $\rho_{\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Polarisation linéaire  $\pi_{+45^\circ}$   $|\varepsilon_{\pi/4}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varepsilon_x\rangle + |\varepsilon_y\rangle)$   $\rho = |\varepsilon_{\pi/4}\rangle\langle\varepsilon_{\pi/4}|$   $\rho_{\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Polarisation circulaire  $\sigma_+$   $|\sigma_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varepsilon_x\rangle + i|\varepsilon_y\rangle)$   $\rho = |\sigma_+\rangle\langle\sigma_+|$   $\rho_{\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

77

## Polarisation partielle

### Analogies avec l'opérateur densité de la mécanique quantique

Etat pur

Mélange cohérent

Polarisation circulaire  $\sigma_+$   $|\sigma_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varepsilon_x\rangle + i|\varepsilon_y\rangle)$   $\rho = |\sigma_+\rangle\langle\sigma_+|$   $\rho_{\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

Etat mélangé

Mélange incohérent

Etat dépolarisé

Mélange statistique  $\pi_x$  et  $\pi_y$  = mélange statistique  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ .

$$\rho = \frac{1}{2}(|\varepsilon_x\rangle\langle\varepsilon_x| + |\varepsilon_y\rangle\langle\varepsilon_y|) \quad \rho_{\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho = \frac{1}{2}(|\sigma_+\rangle\langle\sigma_+| + |\sigma_-\rangle\langle\sigma_-|) \quad \rho_{\{\sigma_+, \sigma_-\}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

78