

Chapitre 4 : Photons

Bibliographie :

Fundamentals of photonics / B.E.A. Saleh et M.C. Tech, en anglais

Optoélectronique / E. Rosencher et B. Vinter, en français

Lasers and electro-optics / C.C. Davis, en anglais

Principle of optics / M. Born et E. Wolf, en anglais

Plus avancé :

Optical coherence and quantum optics / L. Mandel et E. Wolf

Quantum theory of light / R. Loudon

Elements of quantum optics / P. Meystre et M. Sargent

Electrodynamique et optique quantiques / F. Reuse

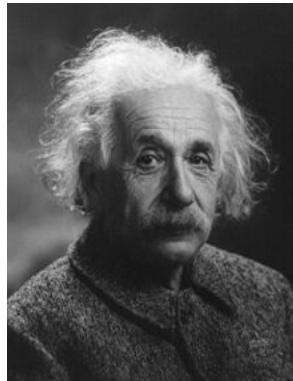
Note: certaines des figures du chapitre ont été copiées ou inspirées de ces références.

Deux pages d'histoire

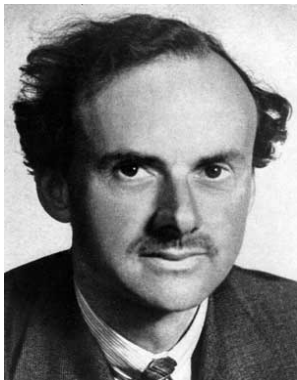
Max Planck 1858-1947
Rayonnement du corps noir,
quantum d'énergie électromagnétique.



Arthur Compton 1892-1962
Diffusion Compton, impulsion du photon.



Albert Einstein 1879-1955
Effet photoélectrique, photon.

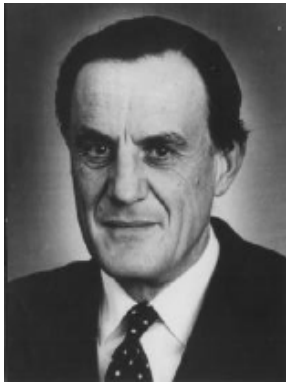


Paul Dirac 1902-1984
Fondements de l'électrodynamique
quantique.



Satyendra Bose 1894 - 1974
সত্যেন্দ্র নাথ বসু
Statistique de Bose

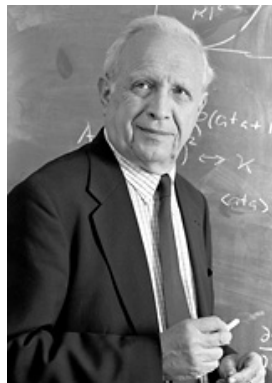
Deux pages d'histoire



Robert Hanbury-Brown
1916-2002
Optique quantique, interféromètre
de Hanbury-Brown et Twiss.



Leonard Mandel 1927-2001
Optique quantique, première
preuve expérimentale du photon.



Roy Glauber né en 1925
Optique quantique, théorie
quantique de la photodétection.



George Sudarshan
ഇ.സി.ജി. സുദർശൻ
né en 1931
Optique quantique, représentation
de Sudarshan-Glauber.

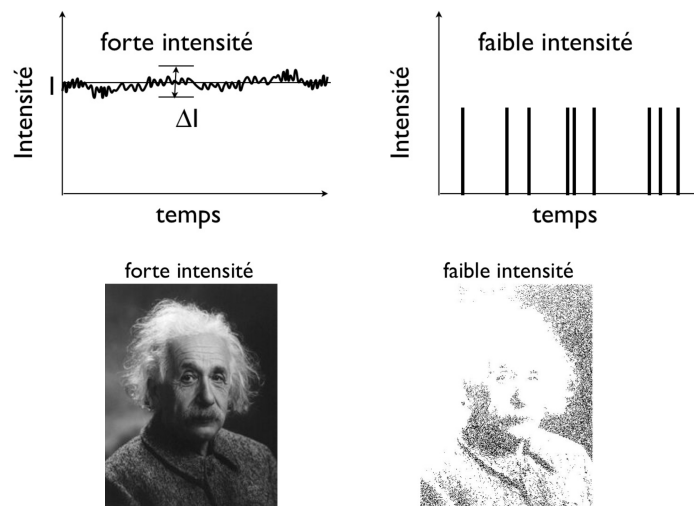


H. Jeffrey Kimble
Né en 1949
Optique quantique, optique
quantique en cavité, première
preuve expérimentale du photon.

4.1 Introduction.

Le but de ce chapitre est de discuter la notion de photon ou de quanta de lumière tel qu'il était appelé auparavant. Nous allons suivre une approche essentiellement expérimentale et pragmatique en discutant les expériences fondatrices de cette notion et ses conséquences sur la statistique du flux de photon et la notion d'états non conventionnels de la lumière dits non-classiques. On finira en essayant de tordre le cou à certaines idées naïves couramment répandues sur le photon-particule grain de lumière. Il est hors de question de rentrer dans les détails du formalisme de l'optique quantique dans ce cours et l'on ne donnera que quelques aperçus de la théorie et des résultats fondamentaux. Des exemples techniques de calculs seront fait en exercice en TD. L'exposé complet de ces notions est l'objet d'un cours en lui-même (Optique Quantique, M.A. Dupertuis).

Les manifestations les plus simples du photon apparaissent lorsque l'on effectue des expériences mettant en jeu de faibles intensités lumineuses où le signal de grandeur continue contenant éventuellement du bruit se transforme en une grandeur discrète formée d'impulsions temporelles ou de matrices de points exposés ou non.

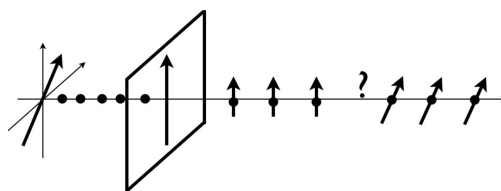


On passe ainsi d'une vision onde à une vision corpusculaire de la lumière.

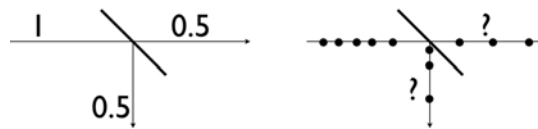
4.1.1 Que se passe t'il à faible intensité dans ces quelques expériences simples ?

Transmission à travers un polariseur.

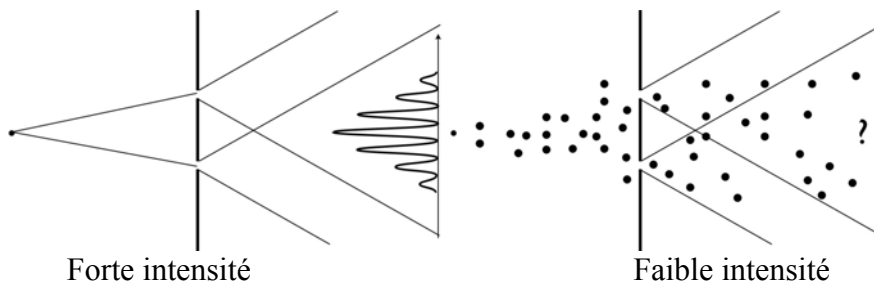
La transmission est 1 quand les axes du polariseur et du champ électrique sont parallèles, 0 lorsqu'ils sont perpendiculaires et 0.5 à 45°, une particule sur deux ou bien des "demi particules" différentes ?



Transmission à travers une lame semi réfléchissante.

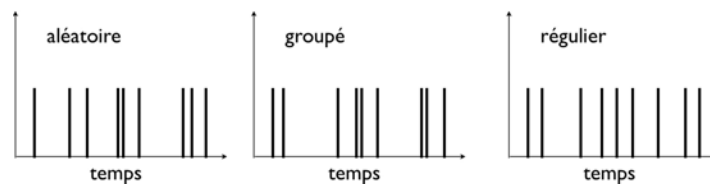


Interférences.



4.1.2 Quelle est la statistique d'arrivée de ces quanta de lumière ?

Est ce toujours la même, quelque soit la nature de la source, son intensité, sa longueur d'onde ? Arrivent-ils de manière complètement aléatoire, ou bien sont-ils plutôt "grégaire" et arrivent-ils de préférences en groupe ou inversement de manière assez ordonnée et bien séparés dans le temps ?



4.1.3 : Comment faut il concevoir le photon ?

Comme

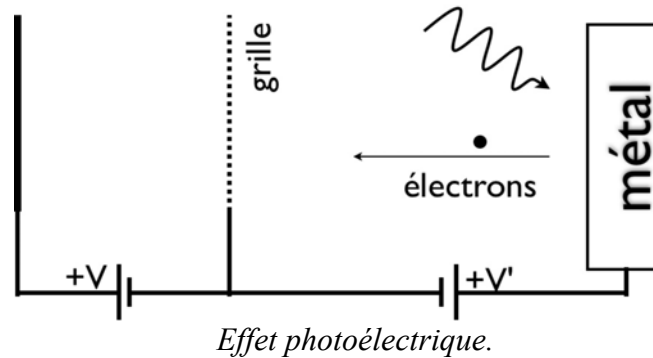
- Une bille de lumière
- Un paquet d'onde
- Une quasi-particule
- Une vue de l'esprit (un paradigme)

4.2 Quelques expériences fondatrices simples.

4.2.1 Rayonnement du corps noir (Planck 1900).

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le modèle développé par Planck pour décrire le spectre d'émission du corps noir repose sur l'hypothèse que chaque mode électromagnétique supporte une énergie proportionnelle à la fréquence, $E = h\nu$. La constante de proportionnalité h est la constante de Planck. Historiquement Planck ne conçoit cela que comme un artifice de calcul sans implication physique dont la justification reste à trouver. Initialement il pensait faire tendre la constante de proportionnalité vers 0 pour décrire le cas continu.

4.2.2 Effet photoélectrique (Hertz 1887, Einstein 1905).

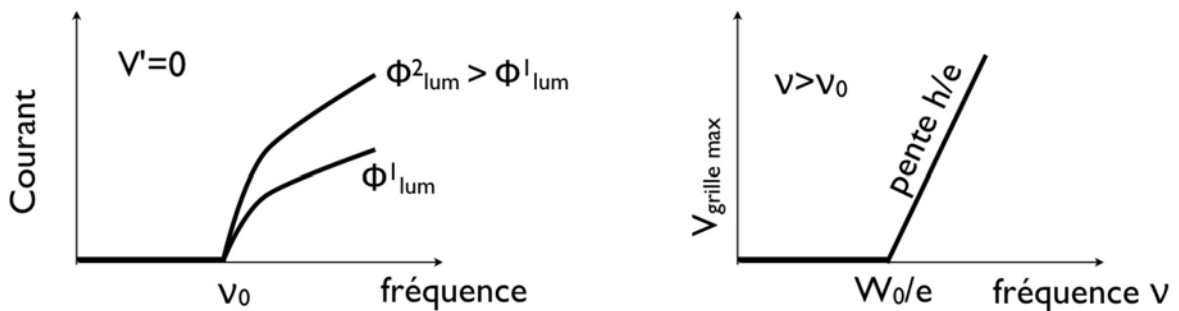


L'effet photoélectrique consiste en l'émission d'un électron par un métal sous irradiation lumineuse. L'électron émis est collecté par une électrode et son énergie cinétique est mesurée avec une grille polarisée. On sait à cette époque qu'il est nécessaire de fournir une certaine énergie à un électron du métal pour l'extraire, cette énergie, W_{sortie} , est appelée travail de sortie. Alors que classiquement on se serait attendu à ce qu'au bout d'un certain temps t_0 suffisamment long, l'énergie absorbée soit suffisante pour extraire un électron quelque soit la fréquence de l'onde incidente.

$$E_{\text{abs}} \propto I(t) \cdot t_0 \propto E^2 t_0 > W_{\text{sortie}}$$

Il n'en est rien. Il existe une longueur d'onde ou une fréquence seuil en dessous de laquelle le processus de photoémission d'un électron ne se produit pas, $\nu > \nu_0$. On peut aussi mesurer l'énergie cinétique des électrons émis. Elle croît linéairement avec la fréquence de l'onde.

$$E_{\text{cin}}^{\text{max}} = eV_m = h\nu - W_{\text{sortie}} \Rightarrow V_m = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_{\text{sortie}}}{e}$$



Caractéristiques courant-fréquence et tension de grille-fréquence.

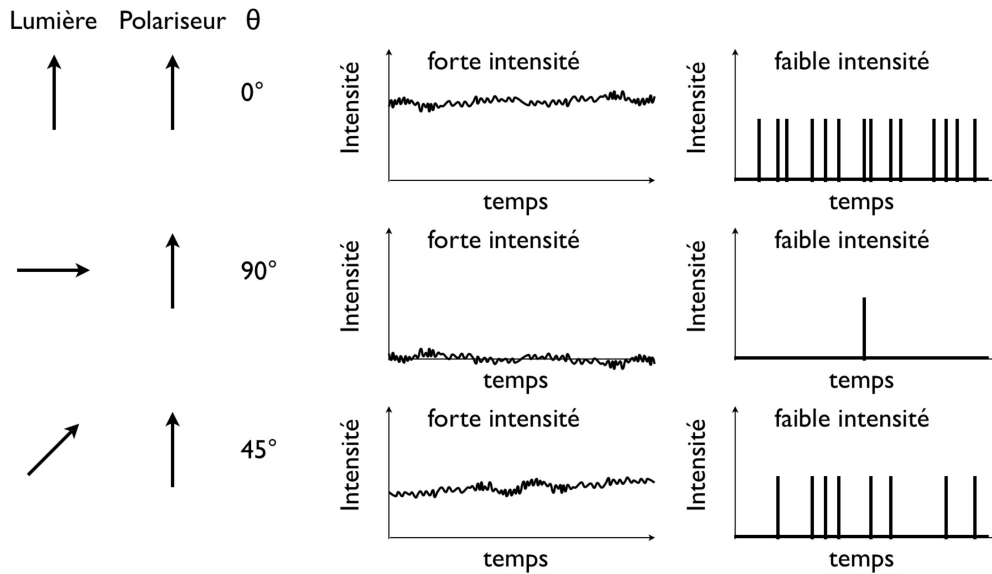
De plus, à forte intensité, le courant est continu, à faible intensité il est constitué d'impulsions discrètes.

L'hypothèse d'Einstein pour expliquer les observations s'inspire de la théorie du corps noir développée par Planck. Il suppose que le transfert d'énergie entre la lumière et les électrons du métal ne s'effectue que par quantité finie, ces mêmes quanta d'énergie dont l'énergie est proportionnelle à la fréquence de l'onde, $E = h\nu$.

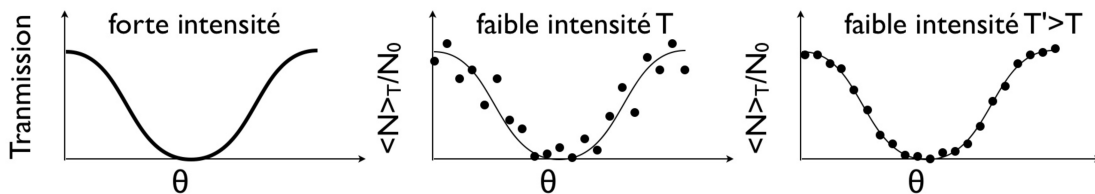
4.2.3 Transmission à travers un polariseur.

4.2.3 Transmission à travers un polariseur.

Même à basse intensité, les impulsions de lumière ne semblent pas différentes des impulsions incidentes (même longueur d'onde etc...), par contre elles ont une polarisation parallèle au polariseur, comme c'est le cas à forte intensité

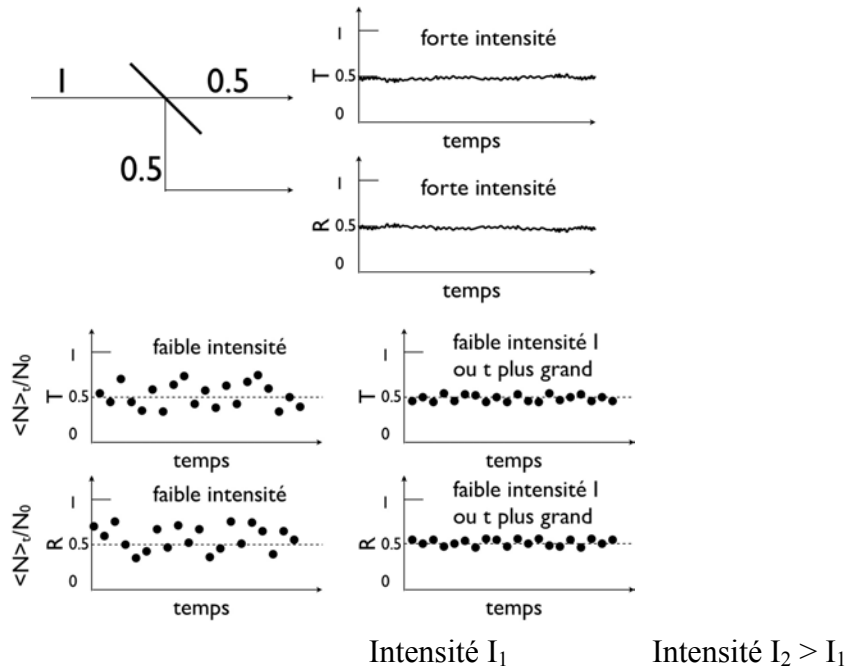


La loi de Malus qui prédit que la transmission est égale au $\cos^2(\theta)$ où θ est l'angle entre la polarisation de la lumière incidente et l'axe du polariseur est reproduite, mais de *manière statistique* uniquement, après un grand nombre d'évènements. $\langle N \rangle_T$ désigne le nombre moyen d'impulsions sur un temps T et N_0 le nombre moyen du faisceau incident

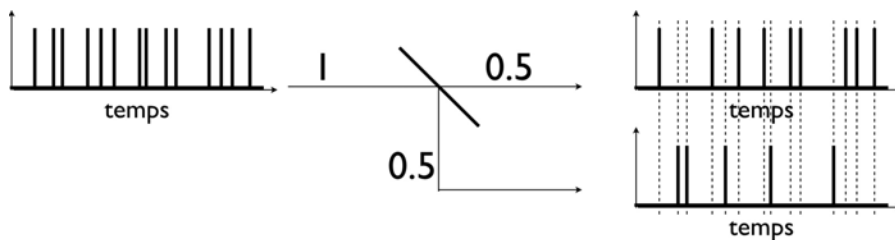


4.2.4 Transmission à travers une lame séparatrice.

A nouveau les lois de transmission sont reproduites de manière statistique.

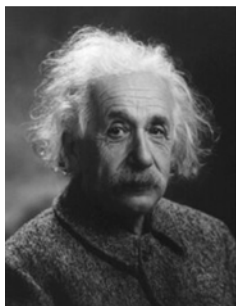


Et également il n'y a pas d'événements en coïncidence sur les deux détecteurs (note cette expérience est beaucoup plus difficile à réaliser que les précédentes et n'a été effectuée que plus récemment).



4.2.5 Plaque photographique.

De même l'aspect granulaire de l'exposition apparaît dans le film (argentique) faiblement exposé et de nouveau l'image se construit de manière statistique pour une intensité ou un temps d'exposition suffisamment long.



Exposition normale.



Faible intensité.



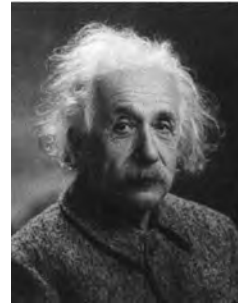
Les grains exposés varient entre expositions.



Moyennage sur 1,



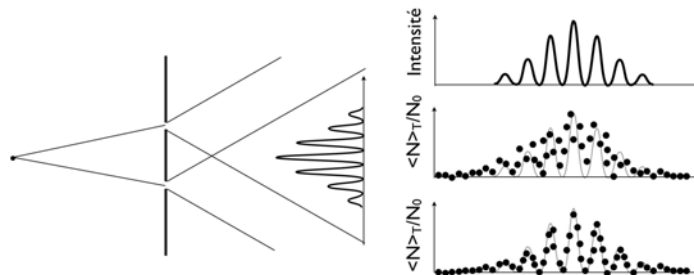
10 et



100 images.

4.2.6 Interférences.

Encore dans ce cas cette fois c'est l'aspect dualité onde-corpuscule qui apparaît de manière statistique. Même lorsque les événements photons sont bien séparés individuellement dans le temps et semblent arriver aléatoirement sur le détecteur. Statistiquement ils reproduisent la figure d'interférence du modèle ondulatoire. Le photon "sent" l'existence des deux fentes.



4.2.7 Définition pragmatique.

Les notions clés qui sont apparues sont les suivantes:

Quantum de lumière, d'énergie $E = h\nu$.

De manière statistique, pour un grand nombre d'événements, on retrouve les prédictions ondulatoires classiques.

La probabilité de détection d'un quantum de lumière est proportionnelle à l'intensité lumineuse, $p(r) \propto E(r)^2$.

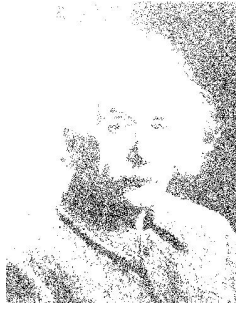
Première définition pragmatique et volontairement un peu ambiguë :

Le photon est le phénomène qui fait faire un "clic" sur le détecteur

A ce stade remarquons que :

La définition évite soigneusement le terme de particule et on a parlé de probabilité de détection et non de probabilité de présence. On verra à la fin du chapitre que ce n'est pas par hasard.

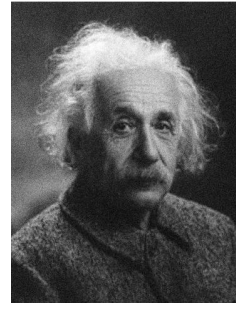
La définition inclut l'onde électromagnétique (la lumière) *et* le détecteur (le tube photomultiplicateur, la diode à avalanche ou la plaque photographique). Pour formaliser cela plus strictement il faut développer toute la théorie de la photodétection (voir cours Optique Quantique, M.A. Dupertuis). On supposera également dans la suite que le bruit ou la



Moyennage sur 1,



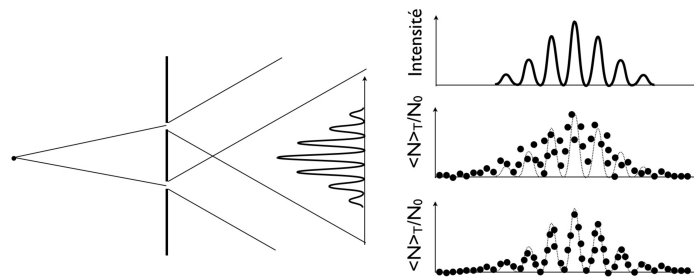
10 et



100 images.

4.2.6 Interférences.

Encore dans ce cas cette fois c'est l'aspect dualité onde-corpuscule qui apparaît de manière statistique. Même lorsque les événements photons sont bien séparés individuellement dans le temps et semblent arriver aléatoirement sur le détecteur. Statistiquement ils reproduisent la figure d'interférence du modèle ondulatoire. Le photon "sent" l'existence des deux fentes.



4.2.7 Définition pragmatique.

Les notions clés qui sont apparues sont les suivantes:

Quantum de lumière, d'énergie $E = h\nu$.

De manière statistique, pour un grand nombre d'événements, on retrouve les prédictions ondulatoires classiques.

La probabilité de détection d'un quantum de lumière est proportionnelle à l'intensité lumineuse, $p(r) \propto E(r)^2$.

Première définition pragmatique et volontairement un peu ambiguë :

Le photon est le phénomène qui fait faire un "clic" sur le détecteur

A ce stade remarquons que :

La définition évite soigneusement le terme de particule et on a parlé de probabilité de détection et non de probabilité de présence. On verra à la fin du chapitre que ce n'est pas par hasard.

La définition inclut l'onde électromagnétique (la lumière) *et* le détecteur (le tube photomultiplicateur, la diode à avalanche ou la plaque photographique). Pour formaliser cela plus strictement il faut développer toute la théorie de la photodétection (voir cours Optique Quantique, M.A. Dupertuis). On supposera également dans la suite que le bruit ou la

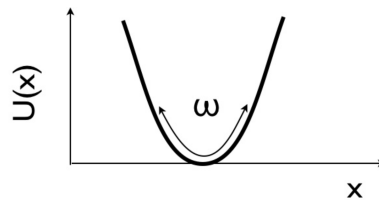
statistique des clics sur le détecteur est relié aux fluctuations du champ électromagnétique tel qu'il est décrit quantiquement. En fait, on peut montrer que pour une grande classe d'états de la lumière, incluant tous les états classiques, la source du bruit peut être indifféremment modélisée dans le détecteur ou dans le champ.

4.3 Quantification du champ électromagnétique.

Le but de cette section est de donner un avant-goût de la description quantique du champ électromagnétique. De nombreuses affirmations seront faites sans démonstration. Des exemples techniques de calculs seront fait en exercice en TD.

4.3.1 Rappel oscillateur harmonique en mécanique quantique.

Classiquement un oscillateur harmonique décrit le mouvement d'un particule dans un potentiel parabolique $U(x)=kx^2/2$, ou bien, ce qui est équivalent, soumise à une force de rappel à l'écart à la position d'équilibre.



Oscillateur harmonique.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(x) = -k\vec{x}$$

l'équation du mouvement est

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx$$

dont la solution s'écrit :

$$x = X_0 \cos(\omega t + \varphi), \text{ avec } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

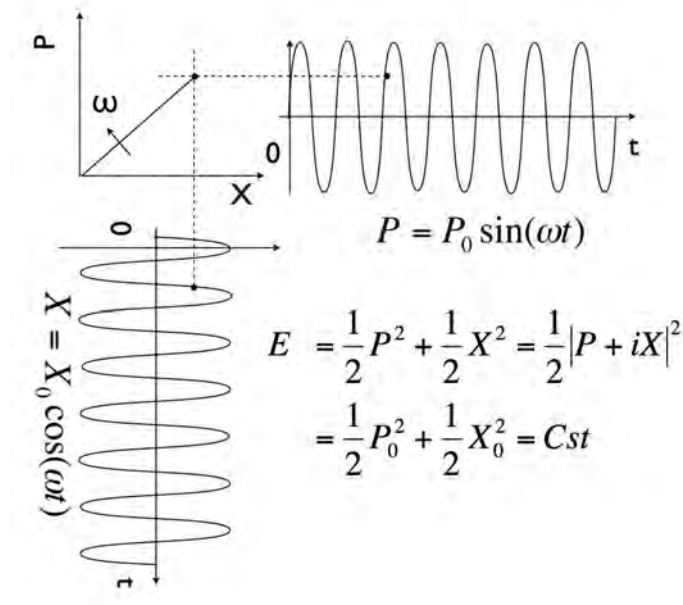
L'énergie totale est :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

qui peut se mettre sous les formes :

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega^2 x^2 \right) \text{ avec } p = mv = m \frac{d}{dt} x$$

L'énergie de l'oscillateur oscille entre énergie cinétique et énergie potentielle ou autrement dit entre les deux quantités conjuguées $E_{cin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}P^2$ et $E_{pot} = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}X^2$ et l'évolution du système peut être représenté comme un vecteur tournant dans le plan X, P :



Quantiquement, on écrit l'énergie totale, le Hamiltonien sous la même forme :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Et la quantification s'obtient en considérant maintenant que :

p et x sont maintenant des opérateurs, où en représentation r, $p = \frac{\hbar}{i}\nabla_x$ ou $p = \frac{\hbar}{i}\nabla_r$ en trois dimensions.

Ces opérateurs, qui en mécanique classique commutent, ne commutent plus et satisfont : $[x, p] = i\hbar$

Pour être plus général, on préfère écrire :

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 Q^2) \text{ avec } [Q, P] = i\hbar$$

On sait (voir cours de mécanique quantique) que les états propres $|\varphi_n\rangle$ peuvent s'écrire en fonction des polynômes d'Hermite et que les valeurs propres E_n de $|\varphi_n\rangle$ sont quantifiées en :

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$$

Au cours du calcul, on a été amené à définir les quantités et opérateurs suivants :

Opérateur création : $a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(P + i\omega Q)$

Opérateur annihilation : $a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(P - i\omega Q)$

Opérateur nombre : $N = a^+ a$

De même : $P = \frac{\sqrt{2\hbar\omega}}{2}(a^+ + a)$ et $Q = \frac{\sqrt{2\hbar\omega}}{2i\omega}(a^+ - a)$

Attention a et a^+ ne sont pas des observables. On a les propriétés suivantes :

$$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$$

$$[a, a^+] = 1$$

$N|\varphi_n\rangle = n|\varphi_n\rangle$, ce qui justifie le nom opérateur nombre

$a^+|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle$, ce qui justifie le nom opérateur création

$a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle$, ce qui justifie le nom opérateur annihilation

D'autre part du fait que $[Q, P] \neq 0$ ($=i\hbar$) découlent les relations d'incertitude : $\sigma_P \sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2}$

Rappel à propos des variables conjuguées : en mécanique classique, soient q_i , \dot{q}_i et t les variables décrivant l'état du système. L'équation de la dynamique décrivant l'évolution du système s'écrit :

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = 0 \text{ où } \mathcal{L} \text{ est le Lagrangien.}$$

Par définition le *moment conjugué* de la variable q_i est :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

Le *Hamiltonien* est la transformée de Legendre de \mathcal{L} :

$$\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}$$

qui satisfait les équations de Hamilton-Jacobi :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Pour une particule de masse m et de charge q :

$$\mathcal{L} = E_{cin} - E_{pot} = T - V, \quad \mathcal{L} = \frac{p^2}{2m} - V(r)$$

et en présence d'un champ électromagnétique :

$$T = \frac{p^2}{2m}, \quad V(r) = q\varphi - q\vec{v} \cdot \vec{A} \text{ et } \mathcal{L} = \frac{p^2}{2m} - q\varphi + q\vec{v} \cdot \vec{A}$$

4.3.2 Quantification du champ électromagnétique.

L'idée, lorsque l'on traite quantiquement le champ électromagnétique (encore une fois nous n'avons pas l'intention de faire les calculs ici) est :

-1- D'écrire l'énergie électromagnétique de l'onde lumineuse de vecteur d'onde k et de pulsation ω sous une forme familière. C'est-à-dire une équation bien connue par ailleurs dont on connaît bien les solutions.

-2- La forme recherchée est plutôt celle d'un oscillateur harmonique, car oscillateur harmonique est synonyme d'équation d'un mouvement harmonique à une pulsation ω bien définie, comme pour nos ondes monochromatiques.

-3- Ensuite de passer de quantités réelles à des opérateurs et finalement de quantifier le tout en postulant une valeur finie pour le commutateur de ces opérateurs.

Pour ce faire, il faut écrire l'énergie électromagnétique en fonction non pas des champs E et B mais en fonction des potentiels $A(r,t)$ et $V(r,t)$ après avoir décomposé les modes sur une base d'ondes planes de vecteurs d'onde k :

$$A = \sum_k A_k e^{i(kr - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On montre que l'énergie électromagnétique du mode k s'exprime en fonction de A sous la forme :

$$U_k = \iiint_V \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d^3r = \frac{\epsilon_0}{2V} \left(\left| \frac{\partial A_k}{\partial t} \right|^2 + \omega_k^2 A_k^2 \right)$$

(Pour cela il faut aussi utiliser la jauge de Coulomb, c'est-à-dire $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$)

Note : les modes sont initialement calculés dans un grand volume de taille finie. Q_k , P_k et A_k dépendent du volume de la boîte dans lequel on calcule les modes optiques ω_k , on fait tendre ce volume V vers l'infini à la fin du calcul.

U_k a la forme recherchée, analogue à celle du Hamiltonien de l'oscillateur harmonique en mécanique classique

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega^2 X^2 \right)$$

on peut faire les analogies :

pulsation	$\omega \leftrightarrow \omega_k$
masse	$m \leftrightarrow \frac{\epsilon_0}{V}$
position	$x \leftrightarrow A_k$
impulsion	$p \leftrightarrow \frac{\epsilon_0}{V} \frac{\partial A_k}{\partial t}$

Pour éviter toute confusion dans cette analogie *purement formelle* entre ces quantités et afin de ne pas donner une signification physique en terme de position et d'impulsion il est préférable de nommer ces deux variables conjuguées différemment et l'on écrira :

$$\langle U_k \rangle = \frac{1}{2} \langle P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2 \rangle$$

Les P_k et Q_k sont des expressions de A_k .

L'étape suivante consiste à passer aux opérateurs Q_k , P_k ,

$$H_k = \frac{1}{2} (P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2)$$

puis à quantifier en posant $[Q_k, P_k] = i\hbar$. On peut alors définir immédiatement les mêmes opérateurs annihilation a_k , création a_k^+ , nombre N_k , etc... Les états propres sont bien connus, ce sont ceux de l'oscillateur harmonique. Ils sont indexés par un nombre quantique n_k , et d'énergie propre $E_{n,k}$:

$$E_{n,k} = \left(n_k + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_k \quad H_k |n_k\rangle = E_{n,k} |n_k\rangle = \left(n_k + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_k |n_k\rangle$$

Ce sont ces états $|n_k\rangle$ que l'on dénommera photon et n_k correspond au nombre de quanta d'énergie dans le mode k .

Note 1 : l'état "vide" sans photon ($n=0$) n'a pas une énergie nulle. C'est un fait commun à beaucoup d'objets quantiques. Nous reviendrons sur ce fait plus tard.

Note 2 : le champ électromagnétique, qui est une quantité plus chargée de sens commun physique, peut aussi s'exprimer en fonction des a_k et a_k^+ , après avoir été transformé en opérateur de champ

$$E_k = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2 \epsilon_0 V}} \left(a_k e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} - a_k^+ e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} \right) \vec{e}_k$$

$$H_k = i \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2 \mu_0 V \omega_k}} \vec{k} \wedge \vec{e}_k \left(a_k e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} - a_k^+ e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} \right)$$

Note 3 : Dans le calcul complet, les choses sont un peu plus compliquées car il faut aussi tenir compte de la polarisation du champ électromagnétique.

Note 4 : A ce stade, le photon est un état propre d'un mode stationnaire du champ, c'est à dire un objet à l'opposé du concept de paquet d'onde - particule de lumière et c'est essentiellement comme cela qu'il sera utilisé dans ce cours. Ce n'est pas complètement satisfaisant car cela ne nous permet pas de décrire la propagation de ces quantum d'énergie, propagation dont nous faisons l'expérience tous les jours dans des expériences où on "compte les photons qui se propagent et qui arrivent sur un détecteur". Ceux qui suivront le cours d'optique quantique verront pour faire propager ces états nombres il est nécessaire de réutiliser des objets de type paquet d'onde mais sous une forme un peu différente que les paquets quasi-

monochromatiques d'ondes planes dont nous avons l'habitude en physique classique. Nous en verrons un exemple lorsque nous écrirons l'état propre d'un état cohérent dans le chapitre 4.6.1.

4.4 Propriétés élémentaires du photon

4.4.1 Energie.

L'énergie du photon est l'énergie nécessaire pour passer de l'état $|n_k\rangle$ à $|n_k + 1\rangle$. Comme $E_{n,k} = (n_k + \frac{1}{2})\hbar\omega_k$, nous avons :

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad \text{Energie du photon}$$

Remarque 1 : $E_{n=0} \neq 0 = \hbar\omega/2$, communément appelé "énergie du vide".

Remarque 2 : En principe $\sum_k E_{0,k} \rightarrow \infty$, on s'en sort usuellement par une pirouette en notant que seules les différences d'énergies sont observables et que ce n'est pas grave si l'énergie du point zéro est infinie. Il existe des manières plus rigoureuses de résoudre le problème.

Quelques ordres de grandeur :

$$\hbar = h/2\pi \quad h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

On préfère souvent utiliser l'électron-volt qui est une unité d'énergie mieux adaptée :

$$\begin{aligned} E_{\text{eV}} &= h\nu/e \approx 2,42 \cdot 10^{14} \text{ vHz} \\ &= hc/e\lambda \approx 12\,398/\lambda_{\text{\AA}} \approx 1,2398/\lambda_{\mu\text{m}} \approx 1,24/\lambda_{\mu\text{m}} \end{aligned}$$

Les spectroscopistes utilisent aussi le nombre d'onde $1/\lambda$, exprimé traditionnellement en cm^{-1} .

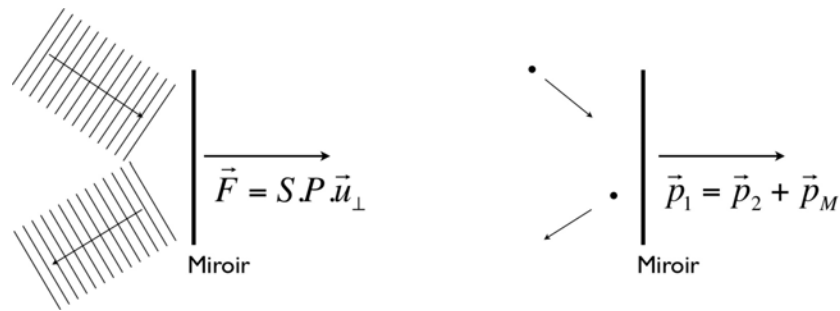
$$1/\lambda_{\text{cm}^{-1}} = 10\,000 / \lambda_{\mu\text{m}} = 10\,000 / 1,2398 E_{\text{eV}} = 8065 E_{\text{eV}}$$

4.4.2 Impulsion , quantité de mouvement.

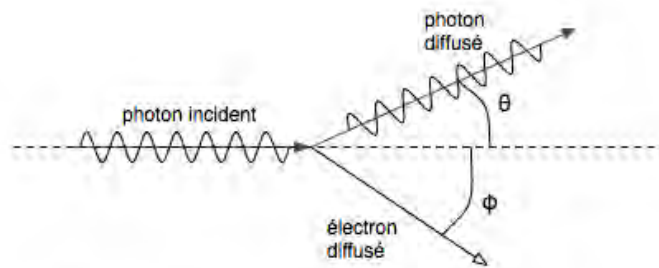
Le photon, défini comme le quantum d'énergie porté par l'onde de vecteur d'onde \vec{k} , possède une impulsion :

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad \text{soit} \quad \|\vec{p}\| = \hbar \frac{\omega}{c} = h \frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad \text{Quantité de mouvement du photon}$$

C'est l'équivalent quantique de la pression de radiation en électromagnétisme classique.



Historiquement c'est Compton, dans les années 1912-1923, qui mit pour la première fois en évidence la quantité de mouvement du photon dans l'expérience, qui porte son nom, de diffusion de rayons X par les électrons d'un atome. Les résultats expérimentaux ne peuvent s'expliquer qu'en attribuant une quantité de mouvement $p = \frac{h}{\lambda}$ au photon lorsque l'on décrit le choc entre le photon X et l'électron.

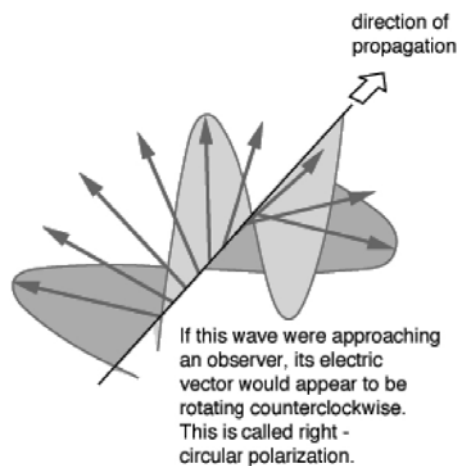


Diffusion Compton: Collision d'un photon avec un électron au repos

4.4.3 Polarisation, spin et moment angulaire.

Les états de polarisation circulaire σ_+ et σ_- possèdent un spin et un moment cinétique. Les états de polarisation linéaire ou elliptique sont décrits comme une superposition d'états σ_+ et σ_- .

$$S_{\sigma_{\pm}} = \pm \hbar \quad \text{Spin du photon}$$



Lumière polarisée circulairement.

C'est le pendant rotatoire de la pression de radiation. Une lumière polarisée circulairement transmet un moment cinétique à un milieu absorbant ou réfléchissant. L'effet a été observé pour la première fois par Beth en 1936 sur un pendule de torsion. Il existe aussi en électromagnétisme classique.

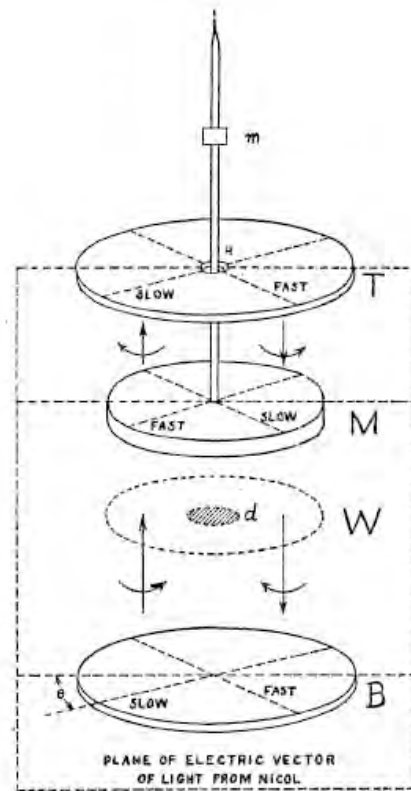
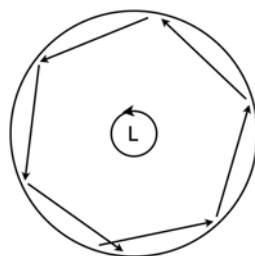


FIG. 3. Wave plate arrangement.

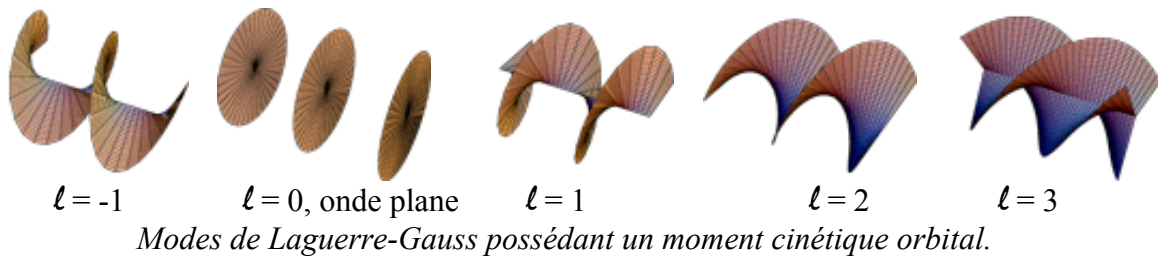
Note : Il ne faut pas croire que c'est le seul moment cinétique que peut porter un faisceau lumineux. Il existe aussi des modes optiques qui ont un moment cinétique orbital $L = \ell \hbar$ qui n'est pas connecté au spin. C'est le cas par exemple :

Des modes de résonateur cylindriques.



Modes résonateur cylindrique possédant un moment cinétique orbital.

Des modes dit de Laguerre-Gauss dont le front d'onde a une forme d'hélice et dont le profil d'intensité est un anneau.



4.4.4 Probabilité d'observation.

L'intensité peut être comprise comme une densité de probabilité d'observation $p(r,t)$ du photon dans un volume dA durant un intervalle dt .

$$p(r,t).dA.dt \propto I(r).dA.dt \quad \text{Probabilité d'observation}$$

Note : selon notre définition du photon qui inclut le processus de photodétection, ce n'est pas par hasard si on parle de densité d'observation et non de présence.

Une onde strictement monochromatique oscille à la pulsation $\omega = \omega_0$ strictement de $t = -\infty$ à $t = +\infty$. La probabilité de détection est constante dans le temps et l'événement est donc complètement indéterminé. Si l'onde harmonique est tronquée entre $t = 0$ et $t = t_0$, la probabilité de détection est limitée à une fenêtre temporelle de largeur $\Delta t = t_0$. Par contre, du fait de la troncature, l'onde n'est plus strictement monochromatique, par exemple elle devient $\Pi(t).\sin(\omega t).\Pi(t-t_0)$, où Π est la fonction échelon. Son spectre de Fourier n'est plus une fonction $\delta(\omega-\omega_0)$, mais acquiert une largeur finie, c'est un paquet d'onde d'autant plus large que Δt est petit. La relation d'incertitude usuelle entre ces deux variables conjuguées de Fourier se traduit par une relation d'incertitude entre temps et fréquence, ou bien temps et énergie :

$$\Delta\nu.\Delta t \geq 1/4\pi$$

$$\Delta E.\Delta t \geq \hbar/2$$

Où Δt est la largeur temporelle de l'impulsion lumineuse, $\Delta\nu$ est la largeur spectrale de l'impulsion et ΔE est la largeur énergétique du photon.

4.5 Statistique des photons.

4.5.1 Quelques définitions

<i>Densité de flux</i>	$I(r)$	s'exprime en puissance/surface c'est-à-dire en énergie/temps/surface	W/cm^2 $J/s/cm^2$
et	$\Phi(r) = \frac{I(r)}{h\nu}$	Nombre de photons/temps/surface	Hz/cm^2

c'est le nombre moyen de photons observés par unité de temps et de surface.

pour une surface donnée, la *puissance incidente* est : $P = \iint_A I(r) dS$ W

et le *nombre moyen de photons par unité de surface* A : $\Phi = \frac{P}{h\nu}$ Hz

pour une durée d'observation T, l'*énergie incidente* est $E = P.T$ J

et le *nombre moyen de photons* est : $\bar{n} = \frac{E}{h\nu}$

L'intensité de la source ne détermine à priori que le nombre moyen de photons détectés par unité de temps. Elle ne dit rien sur la manière dont les photons sont répartis dans le temps.

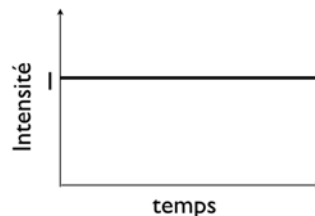
Plus techniquement elle ne renseigne pas sur l'amplitude des fluctuations $\sigma^2 = \langle (n - \bar{n})^2 \rangle$

autour de \bar{n} et encore moins sur les moments statistiques d'ordre supérieur. La statistique est déterminée par la nature de la source émettrice (laser, source cohérente, corps noir, émission thermique ...).

4.5.2 Lumière cohérente.

Classiquement une onde cohérente est une onde pour laquelle la fréquence est parfaitement définie et la moyenne temporelle de $I(r)e^{i(kr-\omega t)}$ sur un temps grand devant une période est strictement constante $\langle I(r)e^{i(kr-\omega t)} \rangle_t = Cst$.

Note : cette définition n'est pas vraiment satisfaisante, dans une version plus avancée il faudrait remplacer cette "moyenne temporelle dépendant du temps" par des moyennes sur des réalisations différentes du même phénomène physique.



Il est donc intuitif de penser que cela doit correspondre à une détection de photons parfaitement aléatoire afin qu'ils soient distribués *en moyenne* de la meilleure manière possible. Toute répartition plus régulière entraînerait des fluctuations de l'intensité à des échelles de temps supérieures à $1/\nu$.

On va chercher la loi de répartition $p(n)$ de détecter n photons pendant un temps T, sachant que le nombre moyen d'arrivée est \bar{n} . Divisons T en N segment de durée T/N, suffisamment petits pour qu'il n'y ait jamais plus que 0 ou 1 photon détecté. La probabilité de détecter 1 photon durant le segment T/N est $p = \bar{n}/N$ et la probabilité de ne pas en détecter est $1-p$. La probabilité de détecter n photons durant T est donc :

$$p_N(n) = (\text{probabilité de } n \text{ évènements 1 photon}) \\ \times (\text{probabilité de } N-n \text{ évènements 0 photon}) \\ \times (\text{nombre d'arrangements possible de ces évènements})$$

$$p_N(n) = p^n (1-p)^{N-n} C_N^n$$

$$= \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = \frac{1}{n!} \times \frac{N!}{(N-n)! N^n} \times \bar{n}^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n}$$

reste à faire tendre $N \rightarrow \infty$:

$$\frac{N!}{(N-n)!} = N \cdots (N-n+1) \text{ est un polynôme de degré } n \propto N^n$$

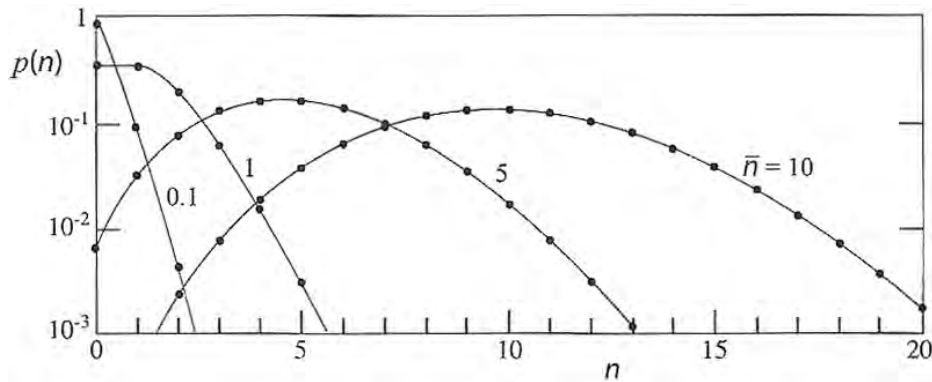
il reste le terme $\left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n}$: $\ln\left(\left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n}\right) = (N-n) \ln\left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right) \propto (N-n) \left(-\frac{\bar{n}}{N}\right) \propto -\bar{n}$ et donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = e^{-\bar{n}}$$

pour $p_{N \rightarrow \infty}(n)$ on obtient la distribution dite distribution de Poisson $p(n)$:

$$p(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad \text{Distribution de Poisson}$$

dont on a un exemple ci-dessous.



Distribution de Poisson.

C'est une distribution qui est :

Centrée sur \bar{n} et qui est d'autant plus large que \bar{n} est grand

Sa valeur moyenne est bien $\sum_{n=0}^{n=+\infty} np(n) = \bar{n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} np(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} = e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n-1)!} = \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^{(n-1)}}{(n-1)!} = \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} = \bar{n} e^{-\bar{n}} e^{+\bar{n}} = \bar{n}$$

Son écart type ou sa variance est $\sigma_{\bar{n}}^2 = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (n - \bar{n})^2 p(n) = \bar{n}$

(calcul semblable à celui de la valeur moyenne)

Le rapport signal sur bruit vaut $S = \frac{\bar{n}}{\sigma_{\bar{n}}} = \sqrt{\bar{n}}$ et croit moins vite que le signal. La part relative des fluctuations $\frac{\sigma_{\bar{n}}}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \rightarrow 0$ avec \bar{n} , plus l'intensité est grande plus on se rapproche du comportement d'une source classique cohérente.

4.5.3 Emission thermique.

Dans le chapitre sur le corps noir nous avons idéalisé le corps noir (source de rayonnement thermique par définition) par une grande cavité optique qui contient des modes de résonances. La cavité se comporte comme une boîte qui contient des modes électromagnétiques stationnaires. Le rayonnement thermique est assimilé à l'émission d'une distribution quasi-continue de résonateurs décrits comme des oscillateurs harmoniques de fréquence ν_m et d'énergie

$$E_{n,m} = (n + \frac{1}{2})h\nu_m$$

Note : il est important de ne pas confondre la quantification des modes optiques selon la fréquence (m) qui est tout à fait classique et le nombre n de quanta d'énergie emmagasinés dans le mode m qui résulte de la quantification du champ.

Nous avons alors démontré que la probabilité d'occupation du niveau n du résonateur à la fréquence ν suit la loi :

$$p(n) = \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}\right) e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}}$$

que l'on préfère en général écrire en fonction de la valeur moyenne de n :

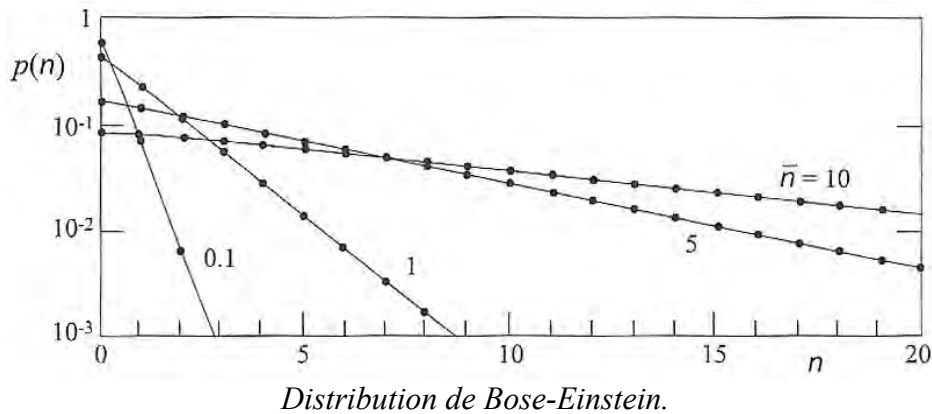
$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} np(n) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} e^{\frac{h\nu}{k_B T}} &= 1 + \frac{1}{\bar{n}} \\ p(n) &= \left(1 - \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}}\right) \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 + \bar{n}} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}}\right)^n \end{aligned}$$

$$p(n) = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} \quad \text{Distribution de Bose-Einstein ou distribution thermique}$$

dont on a un exemple ci-dessous :



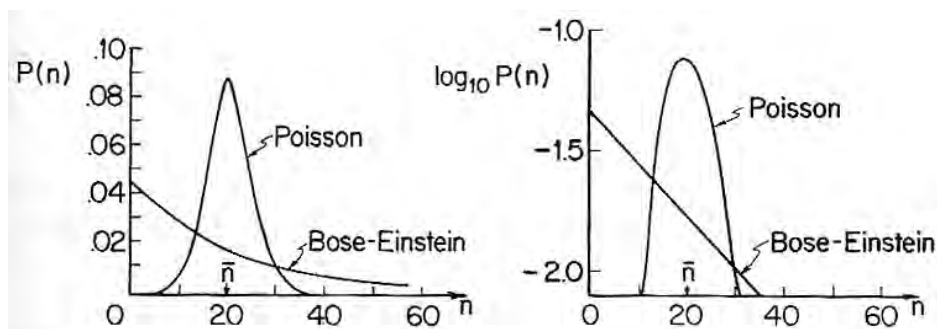
C'est une distribution beaucoup plus plate que la distribution de Poisson d'une lumière cohérente. Elle a les propriétés suivantes :

Elle n'est pas centrée sur \bar{n} mais atteint son maximum pour $n=0$

Sa valeur moyenne est \bar{n}

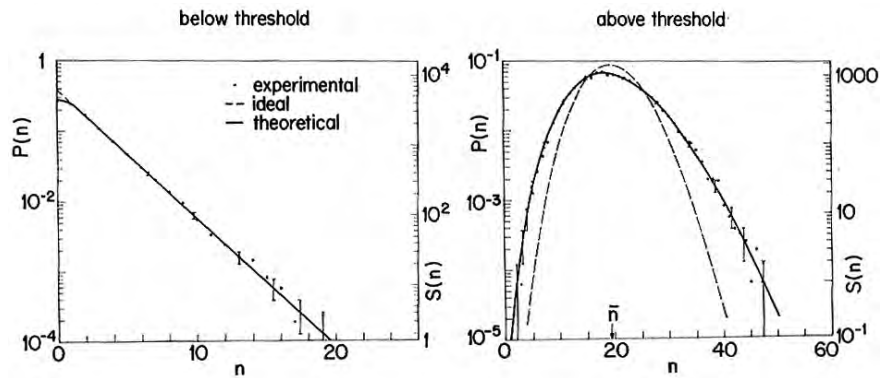
Sa variance est $\sigma_n^2 = \sum_{n=0}^{n=+\infty} (n - \bar{n})^2 p(n) = \bar{n} + \bar{n}^2$ (à faire en exercice)

Et le rapport signal sur bruit vaut $S = \frac{\bar{n}}{\sqrt{\bar{n} + \bar{n}^2}} = \sqrt{\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}}}$ Cette lumière est beaucoup plus bruitée que la lumière cohérente. A forte intensité le bruit devient aussi important que le signal lui-même ($1/S_{\text{thermique}} \rightarrow 1$ alors que $1/S_{\text{cohérent}} \rightarrow 0$).



Distribution de Bose-Einstein et de Poisson, échelles linéaires et logarithmiques.

On vient de voir deux exemples de statistique de photon, ce ne sont pas les seuls, il en existe beaucoup d'autres qui ont été observés. Néanmoins ces deux statistiques sont deux cas limite communément observés dans la nature.



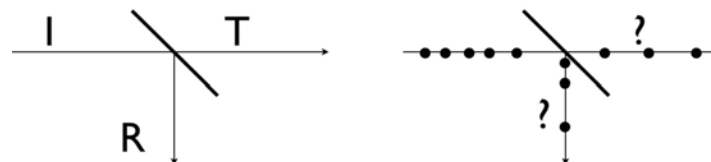
Distribution de Bose-Einstein et de Poisson, émission spontanée et émission laser.

La figure ci-dessus montre des exemple des statistiques expérimentales mesurées sur la fluorescence d'un tube laser He-Ne avant l'enclenchement de l'effet laser (statistique de Bose-Einstein) et sur l'émission laser du même tube après l'enclenchement de l'effet laser (statistique de Poisson)

Note : on retrouvera autrement ces résultats dans le chapitre suivant sur l'interaction atome-lumière, la statistique de l'émission spontanée suit une distribution de Bose-Einstein alors que l'émission stimulée d'un mode électromagnétique suit une distribution de Poisson.

4.5.4 Partitionnement d'un "flux" de photons.

La question que l'on aimerait résoudre maintenant est de savoir comment évolue la statistique d'un faisceau lorsque l'on atténue son intensité ou bien plus généralement lorsque l'on sépare le faisceau en deux à l'aide par exemple d'une lame séparatrice.



Lame séparatrice sans pertes, $R+T = 1$ et on fait l'hypothèse que chaque évènement est indépendant du précédent et du suivant (pas d'interférences entre évènements consécutifs).

Classiquement : $I \rightarrow T.I$ dans le port en transmission
 $\rightarrow R.I = (1-T).I$ dans le port en réflexion

On cherche la statistique du faisceau transmis connaissant la statistique du faisceau incident. Les relations classiques impliquent juste une relation sur les moyennes. R et T sont à prendre maintenant comme des probabilités de transmission ou de réflexion.

Photons : $\bar{n} \rightarrow T. \bar{n}$ dans le port en transmission
 $\rightarrow R. \bar{n} = (1-T). \bar{n}$ dans le port en réflexion

Un quantum d'énergie est détecté soit dans le port en transmission soit dans le port en réflexion mais la conservation de l'énergie interdit qu'il soit détecté dans les deux ce qui impliquerait la détection de $2h\nu$ alors qu'un seul quantum $h\nu$ est incident.

Soit n photons incidents, ils sont transmis avec la probabilité T. La probabilité que m soit transmis est :

$p(m)$ = (nombre de distributions possibles)
 ×(probabilité de transmettre m)
 ×(probabilité de ne pas transmettre $n-m$)

$$\begin{aligned}
 p(m) &= C_n^m T^m (1-T)^{n-m} \\
 &= \frac{n!}{m!(n-m)!} T^m (1-T)^{n-m}
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que (faire en exercice la démonstration) :

$$\begin{aligned}
 \bar{m} &= Tn \\
 \sigma_m^2 &= T(1-T)n = (1-T)\bar{m}
 \end{aligned}$$

le calcul est fait pour un nombre connu de photons initiaux, reste maintenant à sommer sur tous les cas possibles pour une distribution $p_i(n)$ quelconque :

$$p_T(m) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^m T^m (1-T)^{n-m} p_i(n)$$

le cas en réflexion est identique :

$$p_R(m) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^m (1-T)^m T^{n-m} p_i(n)$$

L'application de cette relation à une distribution de Poisson (état cohérent) ou une distribution thermique donne des statistiques qui n'ont pas changé (une distribution de Poisson reste une distribution de Poisson et une distribution thermique reste une distribution thermique), seulement les valeurs moyennes des distributions changent selon $\bar{m} = T\bar{n}$. C'est une propriété remarquable qui n'est pas partagée par toutes les distributions de photons.

Les rapports signal sur bruit deviennent :

$$\begin{aligned}
 S_{coh} &= \sqrt{T\bar{n}} \\
 S_{th} &= \sqrt{\frac{T\bar{n}}{T\bar{n} + 1}}
 \end{aligned}$$

Comme $0 \leq T \leq 1$, le rapport signal sur bruit se dégrade toujours.

Note : ces résultats s'appliquent aussi à la détection où T est le rendement du détecteur, noté plus traditionnellement η .

$$\eta = \frac{\text{nombre de photons détectés}}{\text{nombre de photons incidents}}$$

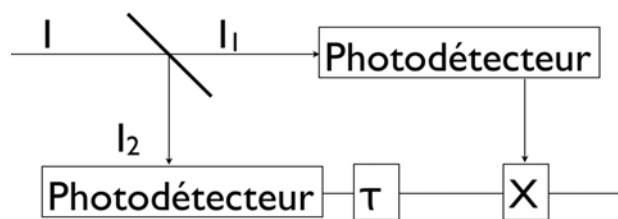
On voit que la statistique des photons sera d'autant mieux reproduite sur le détecteur que η est proche de l'unité.

4.5.5 Mesures de corrélations.

Dans ce qui précède nous avons vu que différentes sources de lumière peuvent avoir la même intensité (le même \bar{n}) mais avec des statistiques différentes, en premier lieu des variances $\langle \Delta n^2 \rangle$ différentes (\bar{n} pour une lumière cohérente et $\bar{n} + \bar{n}^2$ pour une lumière thermique).

Comment peut-on mettre en évidence ces différences ?

Expérience de Hanbury-Brown et Twiss (1956). Historiquement cette expérience a été conçue pour des fréquences radio en radioastronomie et la mesure dans le domaine optique a été faite avec une raie du mercure d'une lampe à arc. En voici l'essentiel dans un résumé abrégé. Le but est de mesurer des corrélations d'ordre supérieur à 1.



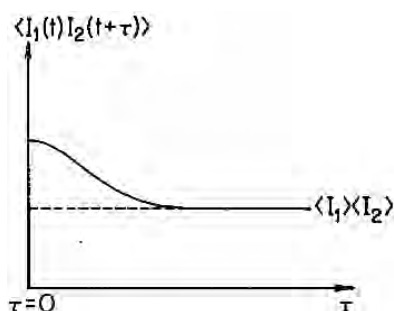
Expérience de Hanbury-Brown et Twiss.

le corrélateur indiqué par \times est un appareil qui mesure la valeur moyenne du produit des deux photocourants, en fonction du retard τ on obtient la fonction de corrélation des courants I_1 et I_2 .

$$C(\tau) = \langle I_1(t)I_2(t + \tau) \rangle_t$$

L'expérience a montré que pour des temps τ courts :

$$\langle I_1(t)I_2(t + \tau) \rangle > \langle I_1(t) \rangle \langle I_2(t) \rangle = I^2$$



Fonction de corrélation entre I_1 et I_2 .

C'est-à-dire qu'il y a une corrélation entre les deux signaux mesurés sur les détecteurs. Ce résultat peut s'expliquer quantiquement mais aussi classiquement. Intéressons nous à la valeur en $\tau = 0$. La mesure de l'intensité délivre une quantité dont la valeur moyenne est proportionnelle à $\bar{n} = \langle n \rangle$, la valeur moyenne du nombre de photons. Le corrélateur mesure une quantité que l'on pourrait supposé être proportionnelle à $\langle n^2 \rangle$. Ce n'est pas exactement le cas, par exemple, si le flux incident est un état avec un et un seul photon, $\bar{n} = 1$ et $\langle n^2 \rangle = 1$

mais aussi $C(0)=0$ car il ne peut y avoir de coïncidence (conservation de l'énergie). En fait plus précisément on peut montrer que le corrélateur mesure la quantité : $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle$.

Note : aperçu de la démonstration. Dans la description quantique du champ électromagnétique, on a défini les opérateurs de créations et annihilation a^+ et a avec $[a, a^+] = 1$ et l'opérateur nombre $N = a^+ a$. Le champ électrique de l'onde peut être exprimé en fonction de ces opérateurs et l'on peut concevoir que :

$$C(0) = \langle I_1(t) I_2(t) \rangle_t \propto \langle E_1^*(t) E_2^*(t) E_1(t) E_2(t) \rangle_t \propto \langle a^+ a^+ a a \rangle$$

Attention toute la subtilité réside dans l'ordre des opérateurs qui n'est pas intuitif.

$$\begin{aligned} a^+ a^+ a a &= a^+ (a a^+ - 1) a && ([a, a^+] = 1) \\ &= a^+ a a^+ a - a^+ a \\ &= (a^+ a)^2 - a^+ a \end{aligned}$$

et $C(0) \propto \langle a^+ a^+ a a \rangle \propto \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle$, or l'écart quadratique moyen $\langle \Delta n^2 \rangle$ est :

$$\begin{aligned} \langle \Delta n^2 \rangle &= \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle n^2 - 2n\langle n \rangle + \langle n \rangle^2 \rangle \\ &= \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \end{aligned}$$

et

$$C(0) \propto \langle \Delta n^2 \rangle + \langle n \rangle^2 - \langle n \rangle$$

et la fonction normalisée du degré de cohérence d'ordre 2 (ces fonctions seront discutées en détails dans le chapitre sur la cohérence) vaut :

$$\begin{aligned} g^{(2)}(0) &= \frac{\langle I_1(t) I_2(t) \rangle}{\langle I_1(t) \rangle \langle I_2(t) \rangle} = \frac{\langle \Delta n^2 \rangle + \langle n \rangle^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2} \\ &= \frac{\sigma_n^2 + \bar{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}^2} \end{aligned}$$

pour une lumière thermique, $\sigma_n^2 = \bar{n} + \bar{n}^2$ et :

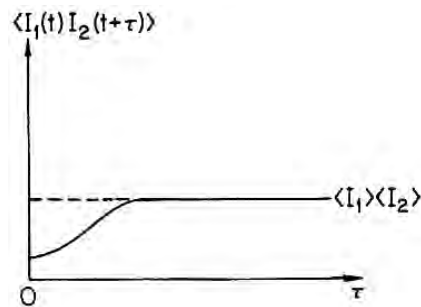
$$g_{th}^{(2)}(0) = 2$$

ce qui traduit une tendance des photons à arriver par groupe. Il y a un excès de bruit comparé à une source cohérente aux temps courts.

Pour une source cohérente $\sigma_n^2 = \bar{n}$ et

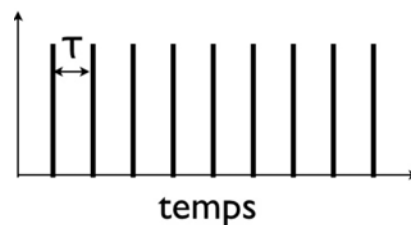
$$g_{coh}^{(2)}(0) = 1$$

Les photons sont détectés de manière complètement indépendante et décorrélée. C'est que l'on convient d'appeler la limite quantique. Une source présentant des valeurs de $g^{(2)} < 1$ nécessitera une description quantique. En fait la première expérience montrant un tel phénomène est due à Kimble et Mandel en 1977 ($g^{(2)}(0) = 0,6$) et c'est véritablement la première preuve de "l'existence" du photon (et non l'effet photoélectrique comme on le dit souvent).



Fonction de corrélation entre I_1 et I_2 pour une source non-classique de lumière.

$g^{(2)}(0) < 1$ signifie que les photons sont détectés de manière "anti-groupée", c'est-à-dire qu'ils sont détectés moins souvent simultanément que lors d'une distribution complètement aléatoire. C'est par exemple le cas dans une expérience où la source émettrice est constituée d'un seul atome. Une fois un photon émis par l'atome excité, il faut un certain temps pour ré-exciter l'atome et qu'il puisse réémettre. Le cas ultime et très désiré expérimentalement est celui d'une source où tous photons sont détectés de manière périodique bien régulière.



Cas idéal d'une source de photons uniques périodiques, une telle source ne peut pas être décrite classiquement.

4.6 Etats quantiques de la lumière.

Revenons sur la description quantique du champ électromagnétique sous forme d'oscillateur harmonique. Nous avons vu qu'il peut s'écrire en fonction des opérateurs de création et annihilation a^+ et a . Considérons les deux opérateurs associés E_P et E_Q , ils représentent les deux quadratures du champ.

$$E = E_P \cdot \cos \omega t + E_Q \cdot \sin \omega t$$

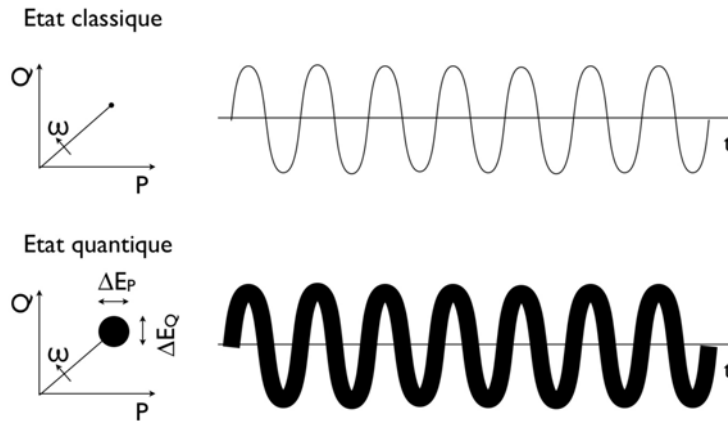
On montre que, du fait de $[a, a^+] = 1$, les deux opérateurs de quadrature E_P et E_Q ne commutent pas non plus.

$$[E_P, E_Q] = i \frac{\hbar \omega}{\varepsilon_0 V} = 2i \mathcal{E}^2$$

et de la même manière que pour X et P, il s'ensuit les relations d'incertitude sur E_P et E_Q :

$$\Delta E_P \Delta E_Q \geq \mathcal{E}^2$$

Les observables E_P et E_Q ne peuvent pas être connus simultanément.



Oscillateur classique et quantique.

A priori, il n'y a pas de raison de privilégier une quadrature par rapport à l'autre pour une source classique et :

$$\Delta E_P = \Delta E_Q > \mathcal{E}$$

C'est la limite classique du bruit pour une source lumineuse.

4.6.1 Etat cohérent.

On peut montrer qu'une source cohérente réalise ce minimum. C'est une source où le champ électrique est le mieux connu possible sur ses deux quadratures. On en connaît déjà la statistique (distribution de Poisson) on peut aussi en écrire l'expression sur la base des états $|m\rangle = |m=0, 1, 2 \dots\rangle$, états de l'oscillateur harmonique de fréquence ν . Pour un cas idéal à un seul mode :

$$|\alpha\rangle = \sum_m e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle$$

pour lequel on a :

$$p(m) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!}$$

qui coïncide avec la statistique d'un état cohérent pour $|\alpha|^2 = \bar{m}$

Attention : $\{|\alpha\rangle\}$ ne constitue pas une base orthogonale $\langle\alpha|\beta\rangle \neq \delta_{\alpha\beta}$

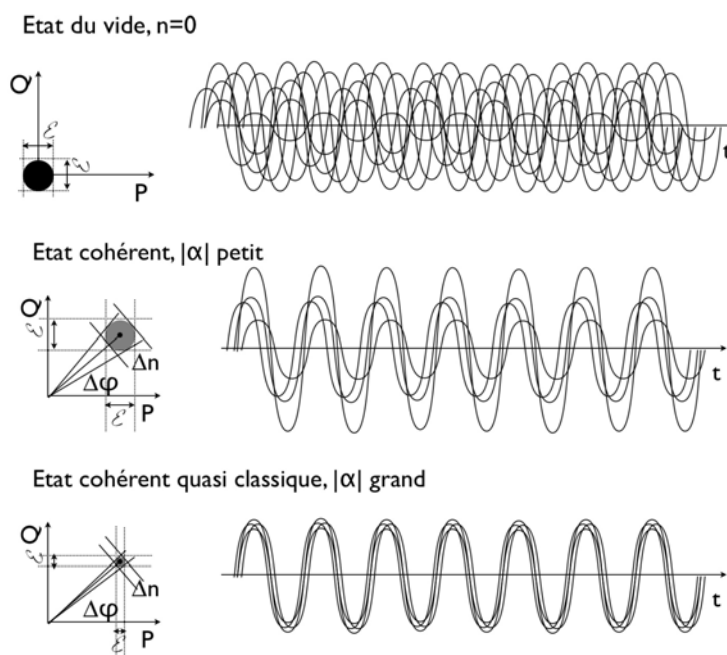
Les $\{|\alpha\rangle\}$ sont des états propres de l'opérateur annihilation (par contre on ne tire rien de $a^+|\alpha\rangle$)

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (\text{exercice})$$

Le nombre est bien :

$$N_\alpha = \langle\alpha|a^+a|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \quad (\text{exercice})$$

On voit que ni l'intensité, ni la phase ne sont connus avec une précision parfaite, par contre plus l'intensité est grande (\bar{n} grand) mieux ces quantités pourront être connues et on se rapproche du cas classique. Dans le cas $n=0$, dénommé "état du vide", toute l'intensité est contenue dans les fluctuations.



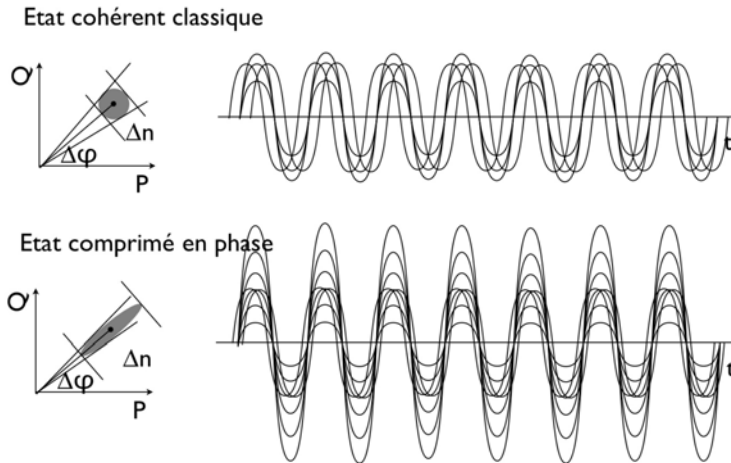
Etat du vide, état cohérent, état quasi-classique.

4.6.2 Etats comprimés de la lumière.

L'inégalité $\Delta E_p \cdot \Delta E_Q \geq \mathcal{E}^2$ n'interdit pas de diminuer l'incertitude sur une quadrature pour autant que l'incertitude sur l'autre augmente proportionnellement $\Delta E_Q < \mathcal{E}$ et $\Delta E_p > \mathcal{E}$. Ce sont ce que l'on appelle des états comprimés, ils sont intéressants pas exemple en métrologie et en spectroscopie où en verrouillant la mesure sur la quadrature de faible bruit on peut atteindre des limites de détection inférieures à la limite classique. Voici quelques exemples simples de ces états comprimés. Ils sont en général difficiles à produire et très fragiles, notamment ils sont facilement détruits s'il y a des pertes lors de la propagation.

4.6.3 Etat comprimé en phase.

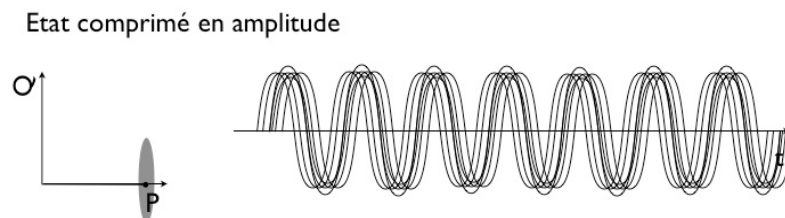
Les relations d'incertitude sont comprimées de sorte que la phase est mieux déterminée que dans la limite classique, cela se fait aux dépens d'une plus grande incertitude sur l'intensité.



Etat cohérent, état comprimé en phase.

4.6.4 Etat comprimé en amplitude.

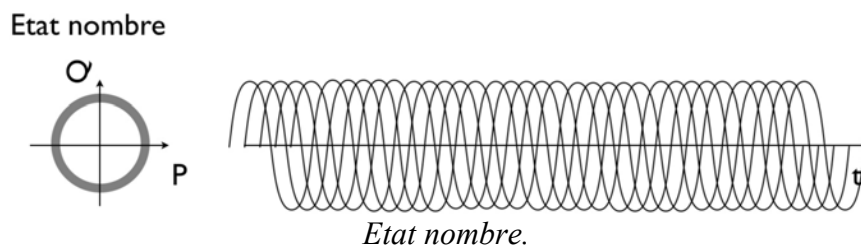
Les relations d'incertitude sont comprimées de sorte que l'intensité est mieux déterminée que dans la limite classique, cela se fait aux dépens d'une plus grande incertitude sur la phase.



Etat comprimé en amplitude.

4.6.5 Etat nombre.

Le cas limite est celui d'un état nombre où n est parfaitement connu mais la phase complètement indéterminée.



Etat nombre.

4.7 Remarques sur certains lieux communs sur le photon.

Il serait tentant d'adopter une vision du photon grain de lumière avec une dualité onde-corpuscule comme pour l'électron. Malheureusement un photon n'est ni une particule, ni une onde ni même quelque chose qui se comporte comme un objet dual onde-particule et une telle vision doit être maniée avec précautions car elle conduit parfois à des conclusions erronées.

Le sens commun attribue à une particule des propriétés tangibles :

elle est quelque part
elle a une certaine vitesse

dans son aspect onde :

elle a une certaine intensité
elle a une phase

La plupart de ces propriétés ne peuvent simplement pas être définies pour le photon, même au prix de relations d'incertitude type Heisenberg.

4.7.1 Localisation.

Il n'est pas possible de définir un opérateur de position pour le photon. On ne peut pas interpréter strictement la "fonction d'onde" $\Psi_\lambda(\mathbf{x})$ par analogie avec la mécanique quantique comme une densité de probabilité de présence. Faire ceci conduit à des incohérences qui ont été mises en évidence dès les années 1949. On peut bien définir un opérateur intensité I mais en général deux opérateurs intensités $I(\mathbf{r}_1, t_1)$ et $I(\mathbf{r}_2, t_2)$ ne commutent pas et il n'est pas possible d'interpréter le signal électronique d'un détecteur comme provenant d'un photon *localisé sur le détecteur*. Pour un électron, la source de la fonction d'onde est un objet ponctuel (au moins jusqu'aux dimensions de Planck), par contre la source du champ électromagnétique n'est pas le "photon particule ponctuelle". Pour une discussion plus approfondie il faut suivre le cours d'optique quantique.

Il n'existe pas d'opérateur de position pour le photon

4.7.2 Quantité de mouvement.

Nous avons attribué une quantité de mouvement au photon $p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$. Il n'en est pas toujours ainsi. Pour une onde plane, les ondes sont définies par un *vecteur* d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ auquel on peut effectivement associer un vecteur impulsion $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ avec $\|p\| = \frac{h}{\lambda}$. Par contre on pourrait tout aussi bien développer les états propres sur une base d'états sphériques Y_l^m et dans cette base les bons nombres quantiques sont le *nombre* d'onde k et non plus \vec{k} et deux entiers l et m . Une telle onde n'a pas d'impulsion. Elle émet autant d'énergie dans les directions u et $-u$.

Un photon ne possède pas nécessairement une impulsion

4.7.3 Phase.

Classiquement une onde est déterminée par son amplitude ou son intensité et sa phase. On a associé l'intensité avec \bar{n} . Il est tentant de chercher une observable de phase φ et un opérateur de phase. Malheureusement même si on peut à la rigueur construire un opérateur de phase $e^{i\varphi}$, cet opérateur n'est pas Hermitien et ne peut pas être associé à une observable physique. Tout ce que l'on peut faire c'est définir les opérateurs

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

Qui eux sont Hermitiens par construction et qui satisfont les relations de commutation :

$$[N, \cos\varphi] = -i \sin\varphi$$

$$[N, \sin\varphi] = i \cos\varphi$$

qui vont, comme d'habitude, engendrer des relations d'incertitude sur n , $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. Ces trois quantités ne pourront être connues simultanément.

$$\Delta n \cdot \Delta \cos\varphi \geq \frac{1}{2} |\langle \sin\varphi \rangle| = \frac{1}{2} |\langle \psi | \sin\varphi | \psi \rangle|$$

$$\Delta n \cdot \Delta \sin\varphi \geq \frac{1}{2} |\langle \cos\varphi \rangle| = \frac{1}{2} |\langle \psi | \cos\varphi | \psi \rangle|$$

Dans cette description :

un état nombre $\Delta n = 0$

$$\langle \sin\varphi \rangle = \langle \cos\varphi \rangle = \langle n | \sin\varphi | n \rangle = \langle n | \cos\varphi | n \rangle = 0$$

$$\Delta \cos\varphi = \Delta \sin\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

un état de phase $\Delta \cos\varphi = 0$

$$\sin\varphi = 0$$

$$\Delta n \rightarrow \infty$$

un état cohérent semi-classique ($|\alpha|^2 \gg 1$)

$$\Delta n \Delta \cos\varphi = \frac{1}{2} |\sin\varphi|$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2|\alpha|}$$

en conclusion :

Il n'existe pas d'opérateur de phase pour le photon

3.7.4 Etats propres et modes.

Il faut répéter ce qui a été déjà mentionné. Il est important de ne pas confondre la quantification des *modes optiques* selon la fréquence (m) qui est tout à fait classique et *l'état propre* de ce mode qui est décrit par le nombre de quanta d'énergie n emmagasinés dans le mode m qui est de nature quantique.

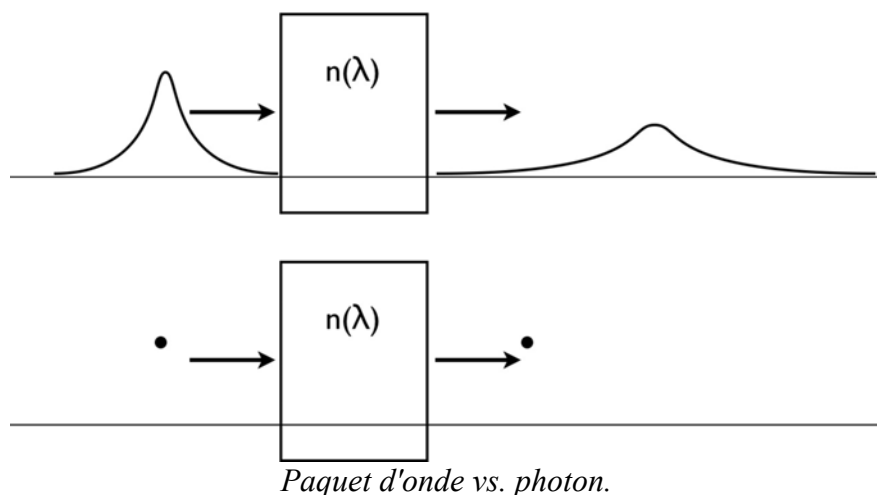
$$E_{n,m} = (n + \frac{1}{2})h\nu_m$$

ce serait par exemple faire la confusion entre 1 Watt de lumière rouge d'un laser He-Ne à 633 nm ($nh\nu$) et 1 Watt de lumière UV à 316 nm ($\frac{n}{2}h(2\nu)$) ou pour un oscillateur mécanique ce serait confondre un pendule de longueur l , oscillant à ω et d'amplitude a , avec un pendule de longueur $l/4$, oscillant à 2ω (l'indice m) et d'amplitude $a/2$ (l'indice n).

3.7.5 Paquet d'ondes.

Il est également tentant et fréquent de décrire le photon sous la forme d'un paquet d'onde. Là aussi cela mène à des difficultés conceptuelles. Par exemple lorsque l'on veut décrire le mécanisme de photodétection pour des objets qui sont très bien approximés par une onde plane. Tel que nous l'avons défini, le photon est un état propre du champ, c'est tout le contraire d'un paquet d'onde. D'autre part un paquet d'onde se propageant dans un milieu dispersif (indice de réfraction dépendant de la longueur d'onde $n(\lambda)$) est toujours l'objet d'une déformation (étalement du paquet d'onde). On n'observe rien de tel pour des photons se "propageant" dans un milieu dispersif.

Un photon n'est pas un paquet d'onde, au contraire c'est un état propre du système



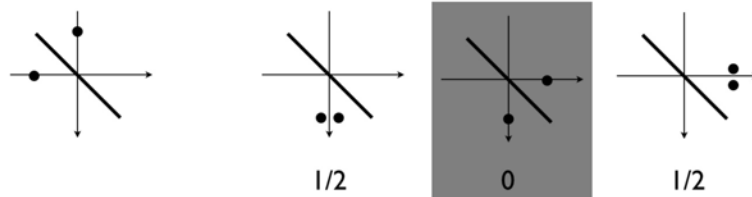
D'un autre côté, la définition du photon que l'on a utilisée n'est pas bien adaptée à la description de la propagation d'un quantum d'énergie électromagnétique et pour ce faire il faudra tout de même passer par des superpositions d'états, donc un paquet d'onde (voir la note 4 du chapitre 4.3.2).

0 photon, 1 photon et maintenant 2 photons.

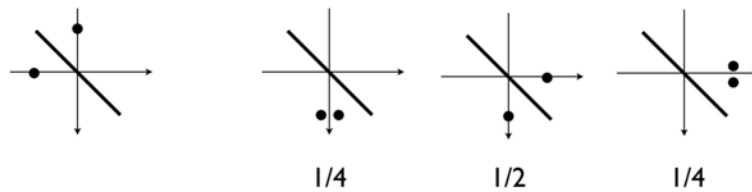
La plupart des états de la lumière dont nous avons l'expérience sont les états thermiques et cohérents ou bien quelque chose de classique entre les deux. La raison principale en est que ces états sont assez robustes quand ils se propagent. Néanmoins ils ne constituent qu'un sous-ensemble de mesure nulle de tous les états possibles de la lumière. Quand on aborde l'étude de ces états, les photons ont un comportement parfois très étrange, encore plus déconcertant que ce dont nous avons l'habitude avec la dualité onde-corpuscule.

En voici un exemple avec deux photons corrélés c'est-à-dire deux photons dont le $g^{(2)}(0)=1$. Si ces deux photons sont envoyés chacun sur les deux ports d'entrée d'une lame séparatrice alors contrairement au calcul statistique classique soit les deux photons sortent par un port soit par l'autre mais jamais un sur chacun des ports de sortie.

photons corrélés



photons non-corrélés



Interférence à deux photons.