ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Cours d'optique II

Physique
Bachelor semestre 6
2017-2018

-4- Photons

Romuald Houdré

Institut de Physique de la Matière Condensée, FSB
romuald.houdre@epfl.ch
Tel: 35487

Bibliographie:

✳**Fundamentals of photonics** / B.E.A. Saleh et M.C. Tech, en anglais

✳**Optoélectronique** / E. Rosencher et B. Vinter, en français

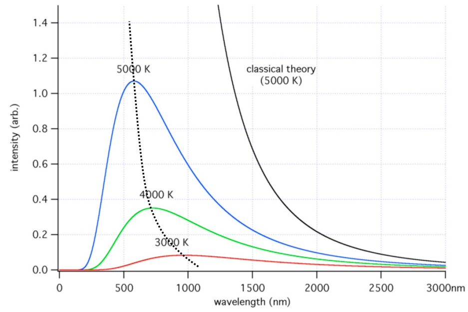
✳**Principle of optics** / M. Born et E. Wolf, en anglais

✳**Lasers and electro-optics** / C.C. Davis, en anglais

✳***Optical coherence and quantum optics*** / *L. Mandel et E. Wolf*
✳***Quantum theory of light*** / *R. Loudon*
✳***Elements of quantum optics*** / *P. Meystre et M. Sargent*
✳***Electrodynamique et optique quantiques*** / *F. Reuse*

Expériences et questions fondatrices

Rayonnement du corps noir



1 Chaque mode électromagnétique dans le corps noir ne peut contenir de l'énergie que par quanta d'énergie E, $E_{\nu,n} = nE$, $n \in \mathbb{N}$

Max Planck
1858 - 1947

2 La valeur de ce quanta est proportionnelle à la fréquence :

$$E = h\nu$$

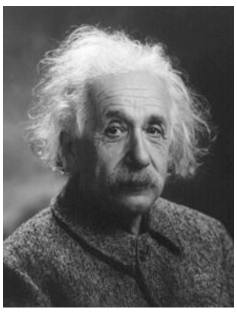
La constante de proportionnalité h est la constante de Planck. $h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s

3 On applique la statistique de Boltzmann pour un système en équilibre thermodynamique avec un thermostat à la température T.

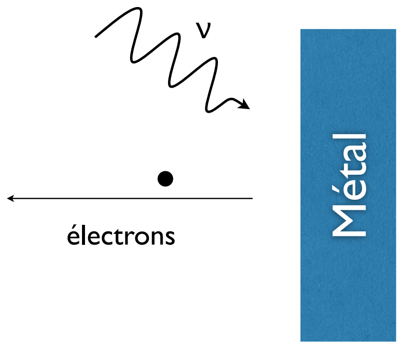
Optique II, PHYS-318, R. Houdré, 2017-2018

Expériences et questions fondatrices

Effet photoélectrique



Albert Einstein
1879-1955



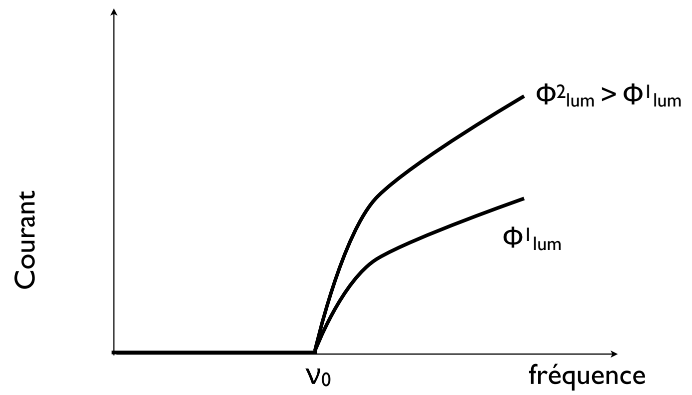
$$\cancel{E_{els} \propto I(t) . t_0 \propto \mathcal{E}^2 t_0 > W_{sortie}}$$

$$\boxed{\nu > \nu_0}$$

Expériences et questions fondatrices

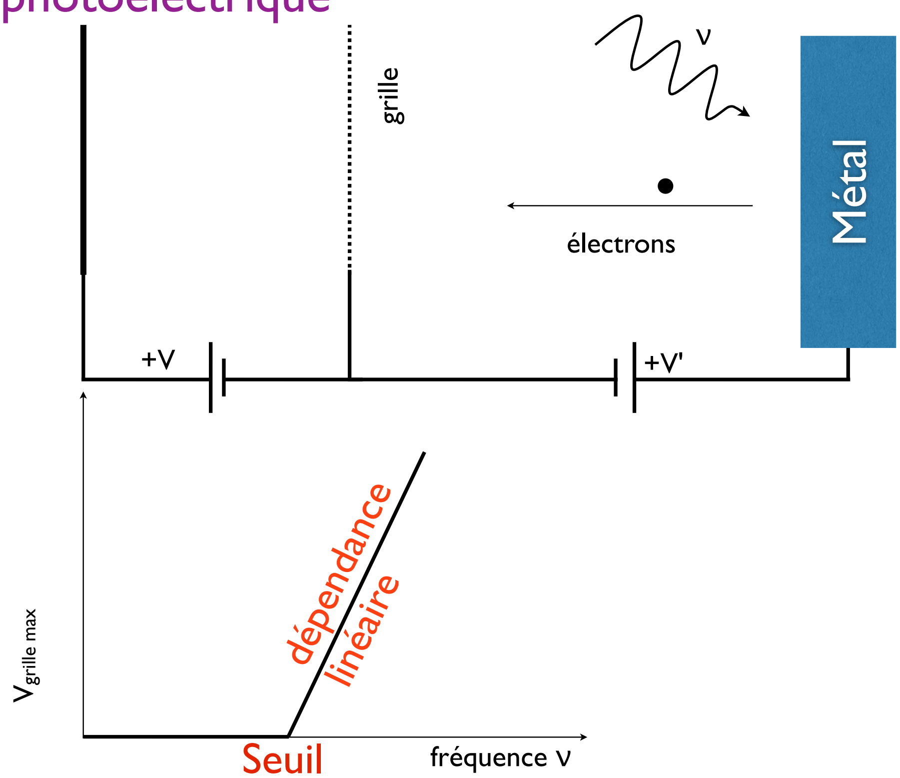
Effet photoélectrique

$\boxed{\nu > \nu_0}$



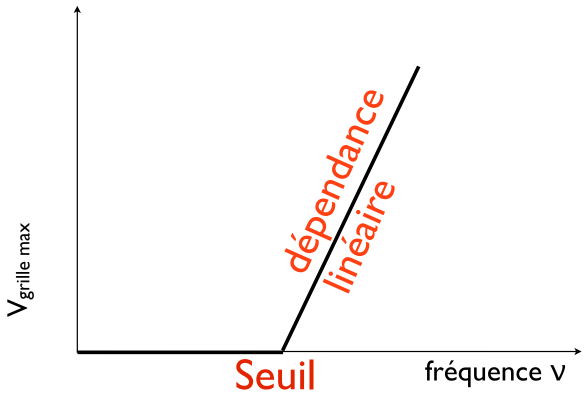
Expériences et questions fondatrices

Effet photoélectrique



Expériences et questions fondatrices

Effet photoélectrique



Energie cinétique maximum ∝ fréquence ν

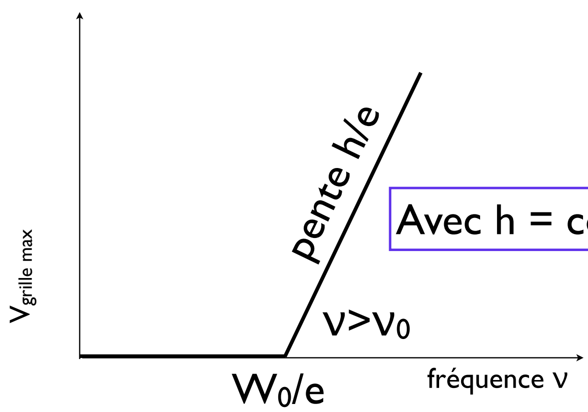
$$E_{cin}^{max} = eV_m = h\nu - W_{sortie}$$

Expériences et questions fondatrices

Effet photoélectrique

$$E_{cin}^{max} = eV_m = h\nu - W_{sortie}$$

$$V_m = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_{sortie}}{e}$$

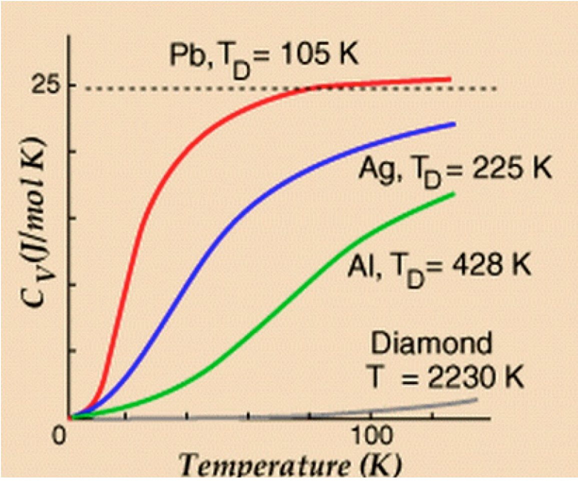


Avec h = constante de Planck

Expériences et questions fondatrices

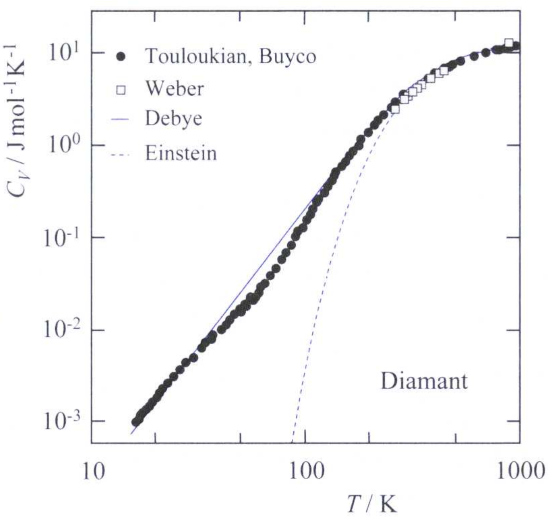
Capacités calorifiques des solides à basse température

La loi de Dulong et Petit C_{vm} = 3R, n'est pas respectée à basse température et les capacités calorifiques des solides → 0 quand T → 0 K



Expériences et questions fondatrices

Capacités calorifiques des solides à basse température



Le modèle de Debye est dérivé de manière analogue à la loi de Planck en traitant les vibrations du réseau cristallin (phonons) de la même manière que les modes du champs électromagnétique pour le corps noir.

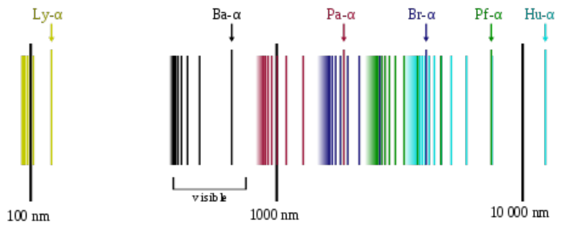
$$E_n^{phonon} = h\nu_n^{phonon} \qquad C_{vm} \approx \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{T_D}\right)^3$$

$$T_D = \frac{hc_{son}}{2k_B}\left(\frac{6N_A}{\pi V}\right)^{1/3}$$

Dans le modèle d'Einstein tous les oscillateurs atomiques vibrent à une fréquence unique.

Expériences et questions fondatrices

Spectres d'émission et d'absorption des atomes



Louis de Broglie
1892 -1987

$$\frac{1}{\lambda} = R_y \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

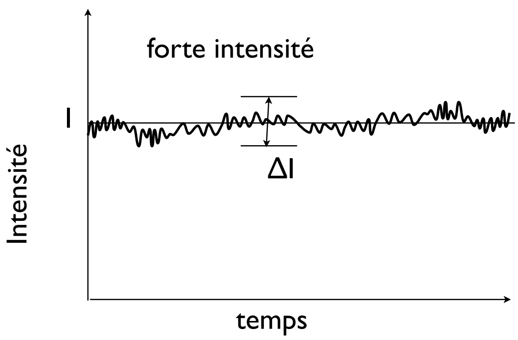
Johannes Rydberg
1854 -1919

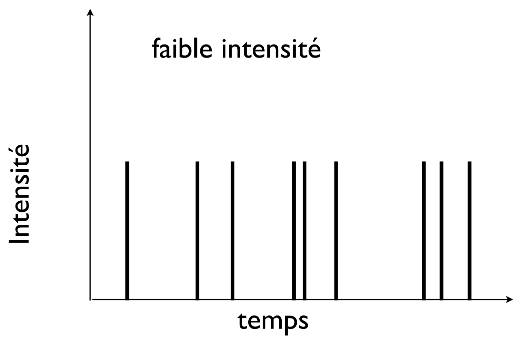
Niels Bohr
1885 -1962

$$R_y = \frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^3 c^2}$$

Expériences et questions fondatrices

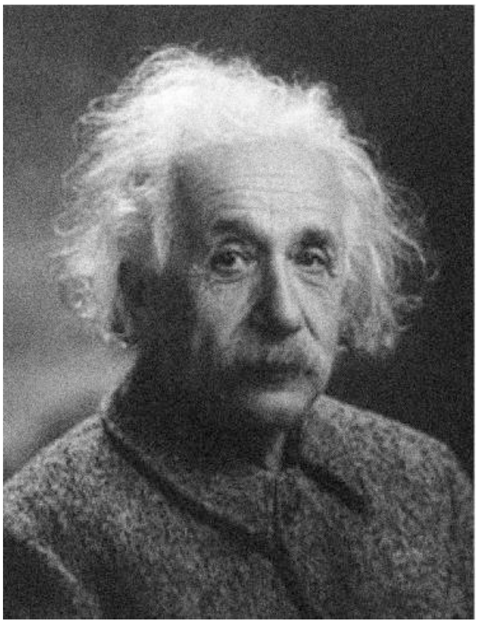
Forte et faible intensité





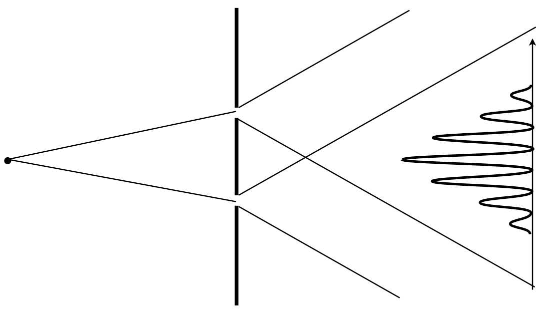
Expériences et questions fondatrices

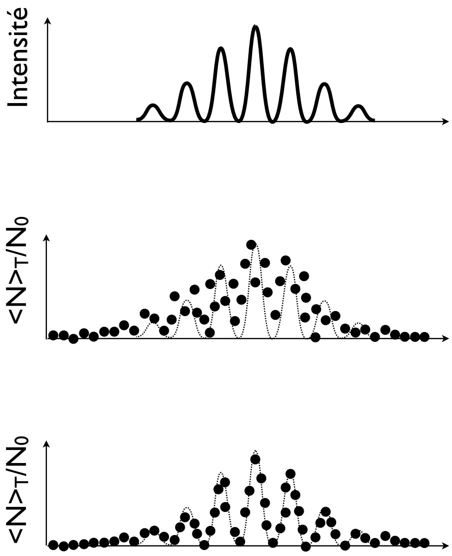
Plaque photographique



Expériences et questions fondatrices

Interférences





Interference fringes with feeble light. By G. I. TAYLOR, B.A., Trinity College. (Communicated by Professor Sir J. J. Thomson, F.R.S.)

[*Read* 25 January 1909.]

phenomena of diffraction would be modified. Photographs were taken of the shadow of a needle, the source of light being a narrow slit placed in front of a gas flame. The intensity of the light was reduced by means of smoked glass screens.

inverse ratio of the corresponding intensities. The longest time was 2000 hours or about 3 months. In no case was there any diminution in the sharpness of the pattern although the plates did not all reach the standard blackness of the first photograph.

standard candle, the amount of energy falling on 1 square centimetre of the plate is 5×10^{-6} ergs per sec. and the amount of energy per cubic centimetre of this radiation is $1{\cdot}6 \times 10^{-16}$ ergs.

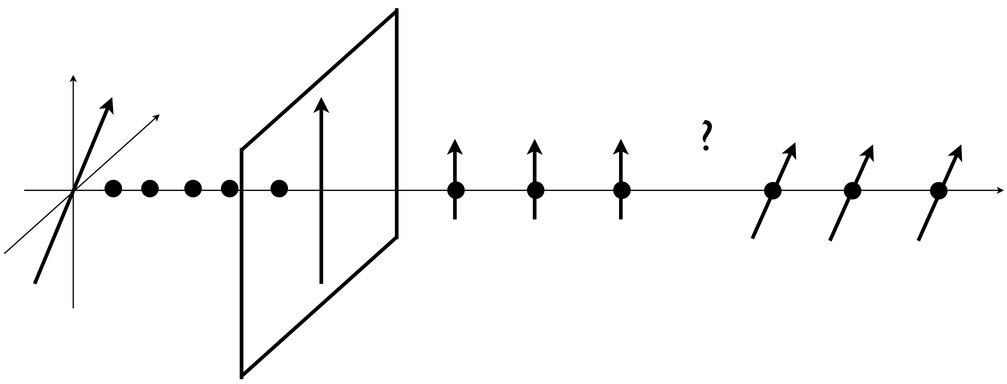
According to Sir J. J. Thomson this value sets an upper limit to the amount of energy contained in one of the indivisible units mentioned above.

(1 erg = 10^{-7}J)

Faux !

Expériences et questions fondatrices

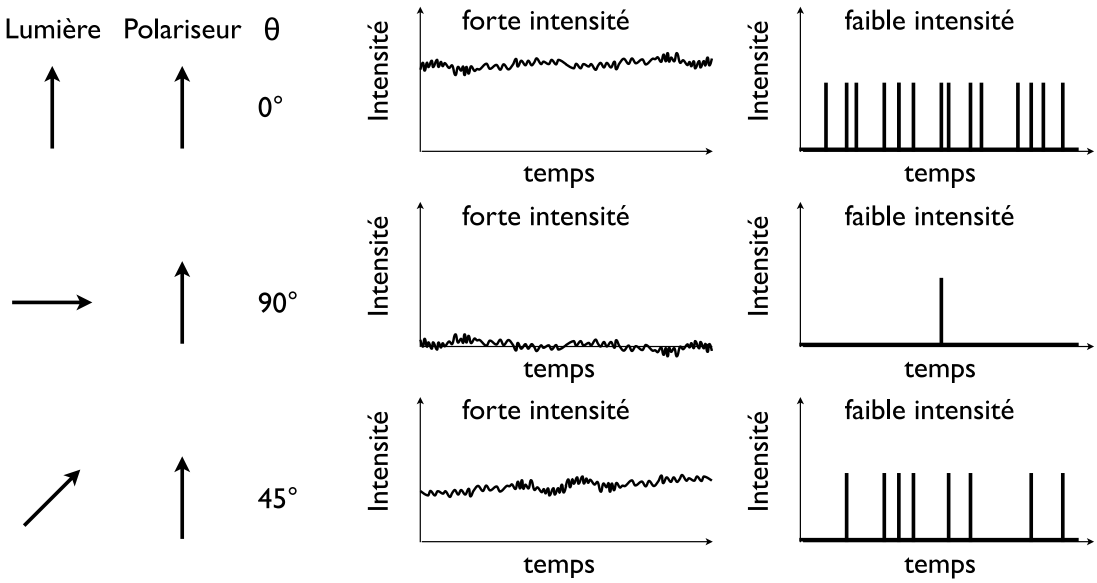
Forte et faible intensité



polariseur

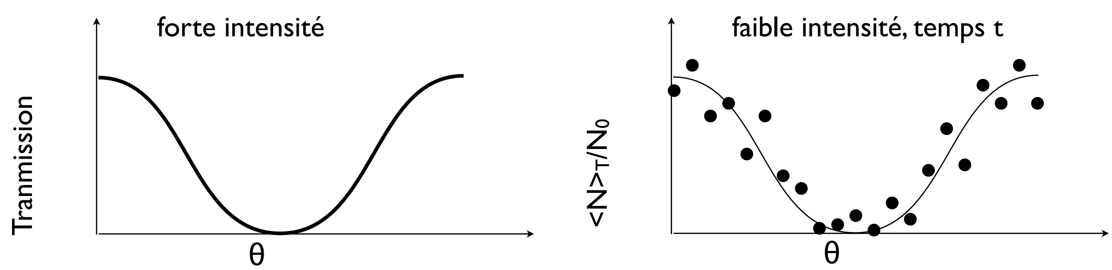
Expériences et questions fondatrices

Polariseur

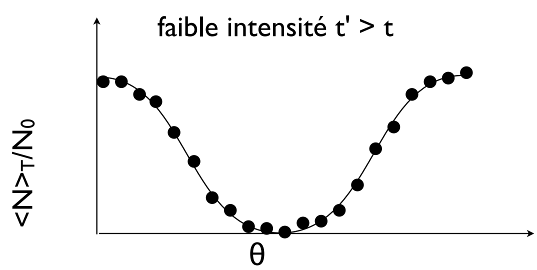


Expériences et questions fondatrices

Polariseur

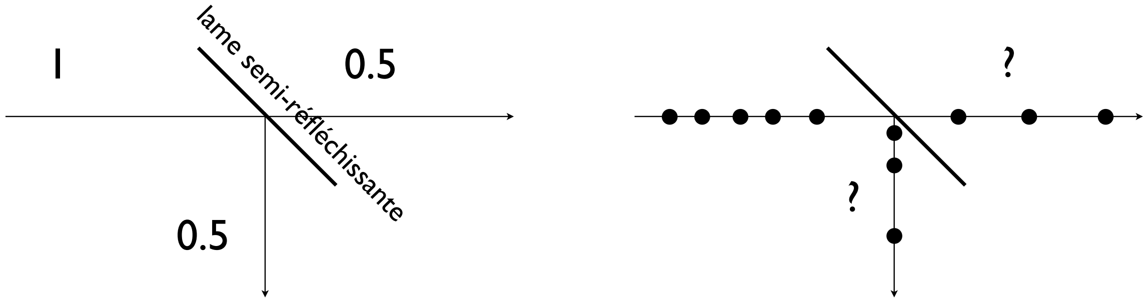


Loi de Malus



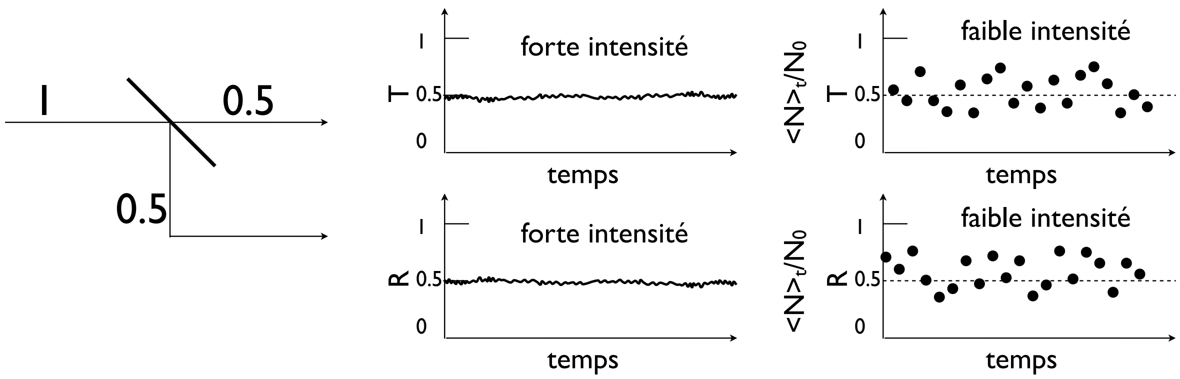
Expériences et questions fondatrices

Forte et faible intensité



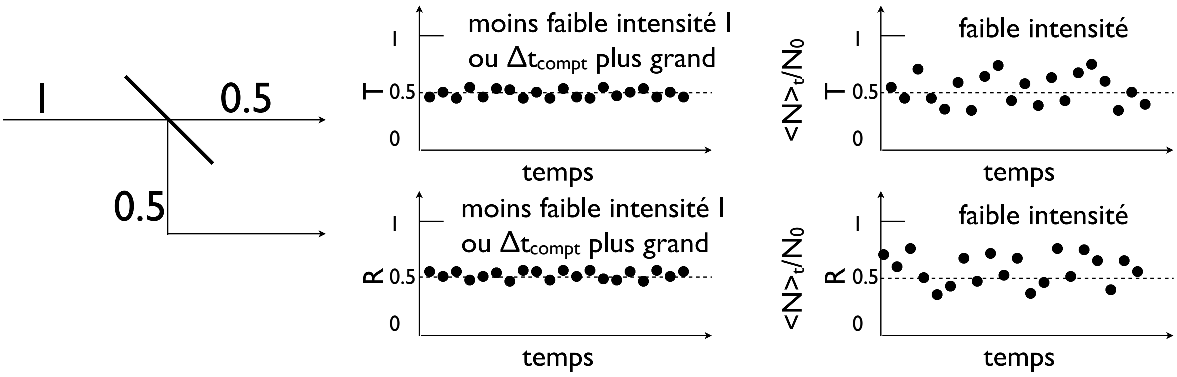
Expériences et questions fondatrices

Lame séparatrice



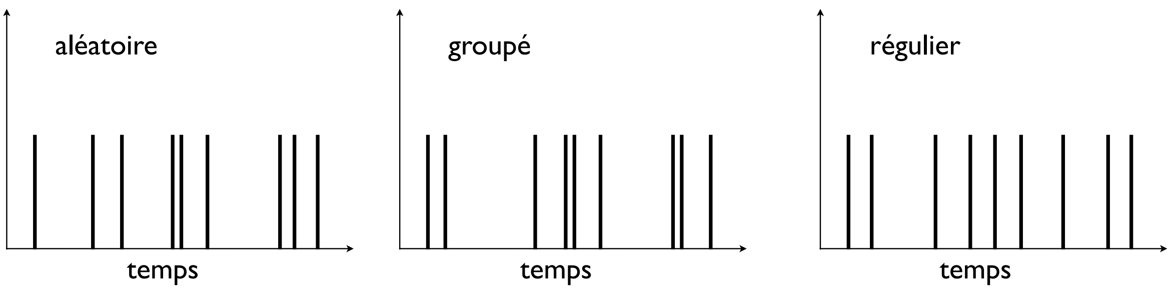
Expériences et questions fondatrices

Lame séparatrice



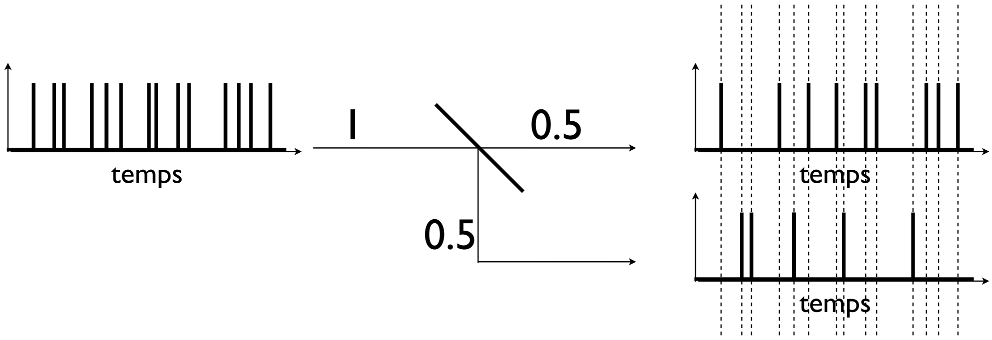
Expériences et questions fondatrices

Statistique ?



Expériences et questions fondatrices

Statistique ?



Définition pragmatique et temporaire

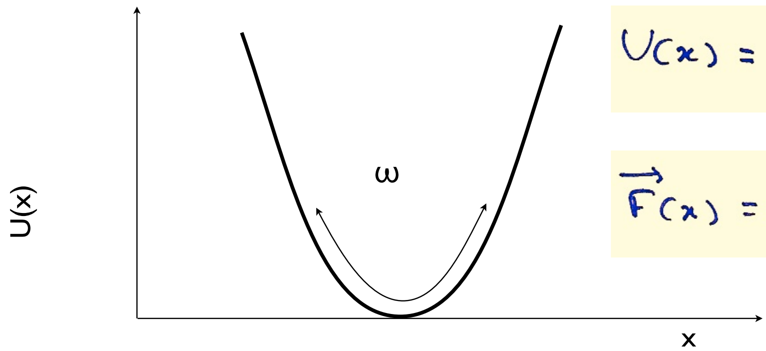
Le photon est le phénomène qui fait faire un "clic" sur le détecteur

Phénoménologie :

Ces évènements reproduisent le comportement observé pour les grandeurs continues quand on moyenne sur un grand nombre d'évènements.

Quantification du champ électromagnétique

Oscillateur harmonique classique



$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\vec{F}(x) = -\vec{\nabla} U(x) = -k\vec{x}$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx$$

$$\boxed{x = X_0 \cos(\omega t + \varphi)} \qquad \boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

Quantification du champ électromagnétique

Oscillateur harmonique classique

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

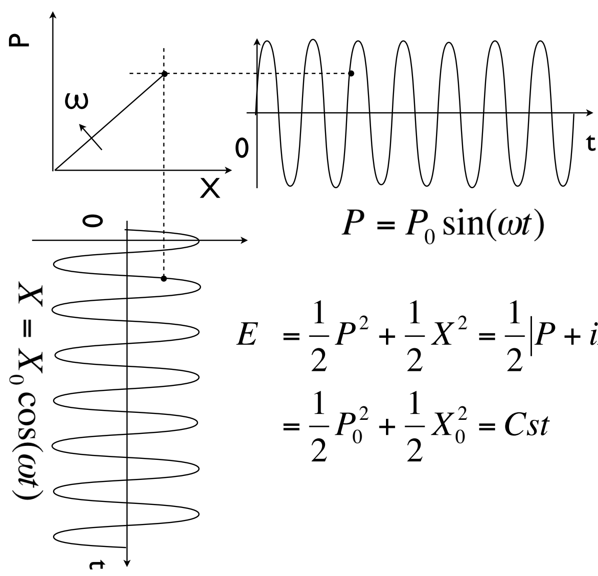
$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$= \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 x^2\right)$$

$$p = mv = m\frac{d}{dt}x$$

$$\mathcal{E}_{cin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} P^2$$

$$\mathcal{E}_{pot} = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} X^2$$



$$P = P_0 \sin(\omega t)$$

$$E = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}X^2 = \frac{1}{2}|P + iX|^2$$

$$= \frac{1}{2}P_0^2 + \frac{1}{2}X_0^2 = Cst$$

Quantification du champ électromagnétique

Oscillateur harmonique quantique

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$p = \frac{\hbar}{i} \nabla_r \qquad [x, p] = i\hbar$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2} (P^2 + \omega^2 Q^2)} \qquad [Q, P] = i\hbar$$

$$\boxed{\mathcal{E}_n = (n + \tfrac{1}{2}) \hbar\omega} \qquad \boxed{H |\varphi_n\rangle = \mathcal{E}_n |\varphi_n\rangle}$$

Optique II, PHYS-318, R. Houdré, 2017-2018

Quantification du champ électromagnétique

Oscillateur harmonique quantique

$$\boxed{H = \frac{1}{2} (P^2 + \omega^2 Q^2)} \quad \boxed{H |\varphi_n\rangle = \mathcal{E}_n |\varphi_n\rangle} \quad [Q, P] = i\hbar$$

Opérateur création

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (P + i\omega Q) \qquad a^+ |\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}\, |\varphi_{n+1}\rangle$$

Opérateur annihilation

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (P - i\omega Q) \qquad a |\varphi_n\rangle = \sqrt{n}\, |\varphi_{n-1}\rangle$$

$$[a, a^+] = 1$$

Opérateur nombre

$$N = a^+ a \qquad N |\varphi_n\rangle = n |\varphi_n\rangle \qquad H = \hbar\omega (N + \tfrac{1}{2})$$

Quantification du champ électromagnétique

Oscillateur harmonique quantique

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(P + i\omega Q \right) \qquad P = \frac{\sqrt{2\hbar\omega}}{2} \left(a^+ + a \right)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(P - i\omega Q \right) \qquad Q = \frac{\sqrt{2\hbar\omega}}{2i\omega} \left(a^+ - a \right)$$

Relation d'incertitude

$$[Q, P] = i\hbar \qquad \sigma_P \, \sigma_Q \geq \frac{\hbar}{2}$$

Quantification du champ électromagnétique

Potentiel vecteur

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Décomposition par mode k

$$\vec{A} = \sum_k \vec{A}_k \, e^{i(kr - \omega t)}$$

Energie électromagnétique (exercices de cette semaine)

$$U_k = \iiint_V \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d^3 r \qquad \vec{\nabla} A = 0$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2V} \left(\left(\frac{\partial A_k}{\partial t} \right)^2 + \omega_k^2 \, A_k^2 \right)$$

Quantification du champ électromagnétique

$$U_k = \frac{\varepsilon_0}{2V}\left(\left(\frac{\partial A_k}{\partial t}\right)^2 + \omega_k^2 A_k^2\right)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 x^2\right)$$

$\omega \longleftrightarrow \omega_k$

$m \longleftrightarrow \frac{\varepsilon_0}{V}$

$x \longleftrightarrow A_k$

$p \longleftrightarrow \frac{\varepsilon_0}{V}\frac{\partial A_k}{\partial t}$

$$U_k = \frac{1}{2}\left(P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2\right)$$

$$\boxed{H_k = \frac{1}{2}\left(P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2\right)} \qquad \boxed{[Q_k, P_k] = i\hbar}$$

Quantification du champ électromagnétique

$$\boxed{H_k = \frac{1}{2}\left(P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2\right)} \qquad \boxed{[Q_k, P_k] = i\hbar}$$

- a_k a_k^+ etc...
- $E_k = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\left(a_k e^{i(kr-\omega t)} - a_k^+ e^{-i(kr-\omega t)}\right)\vec{e}_k$
- $H_k = i\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\mu_0 V\omega_k}}\left(a_k e^{i(kr-\omega t)} - a_k^+ e^{-i(kr-\omega t)}\right)\hbar\wedge\vec{e}_k$

Quantification du champ électromagnétique

$$\boxed{H_k = \frac{1}{2}\left(P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2\right)}$$

$$\boxed{[Q_k, P_k] = i\hbar}$$

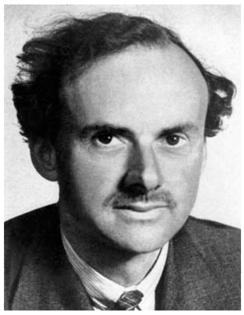
$$\mathcal{E}_{n,k} = \left(n_k + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_k$$

$$H_k |n_k\rangle = \mathcal{E}_{n,k} |n_k\rangle$$

$$= \left(n_k + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_k |n_k\rangle$$

Photon $|n_k\rangle$

Nombre de photons n_k



Paul Dirac
1902-1984

Propriétés élémentaires du photon

Energie

$|n_k\rangle \rightarrow |n_k + 1\rangle$

$$\boxed{E = h\nu = \hbar\omega}$$

n = 0 : état du vide

Ordres de grandeur

$\hbar = h/2\pi \qquad h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s

$E_{eV} = h\nu/e \approx 2.42.\ 10^{14}\ \nu_{Hz}$ électron-volt

eV / µm / Å / nombre d'onde cm^{-1}

$= hc/e\lambda \approx 12\ 398/\lambda_{Å} \approx 12\ 39{,}8/\lambda_{nm}$

$\approx 1{,}2398/\lambda_{\mu m} \approx 1{,}24/\lambda_{\mu m}$

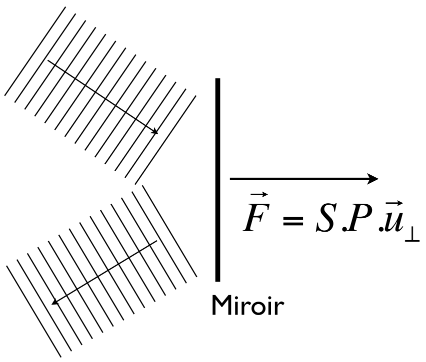
$1/\lambda_{cm^{-1}} = 10\ 000 / \lambda_{\mu m} = 10\ 000\ E_{eV} / 1{,}2398 = 8065\ E_{eV}$

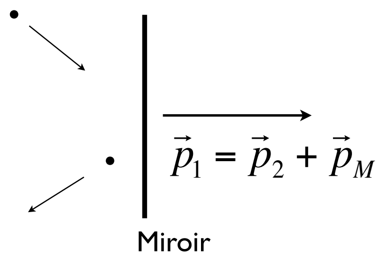
Propriétés élémentaires du photon

“Impulsion”

$$\boxed{\vec{p} = \hbar \vec{k}}$$

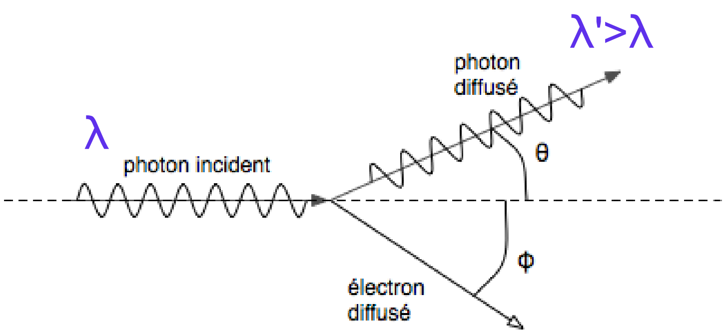
$$|\vec{p}| = \hbar \frac{\omega}{c} = h \frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$





Propriétés élémentaires du photon

Impulsion, diffusion Compton



Diffusion Compton: Collision d'un photon avec un électron au repos

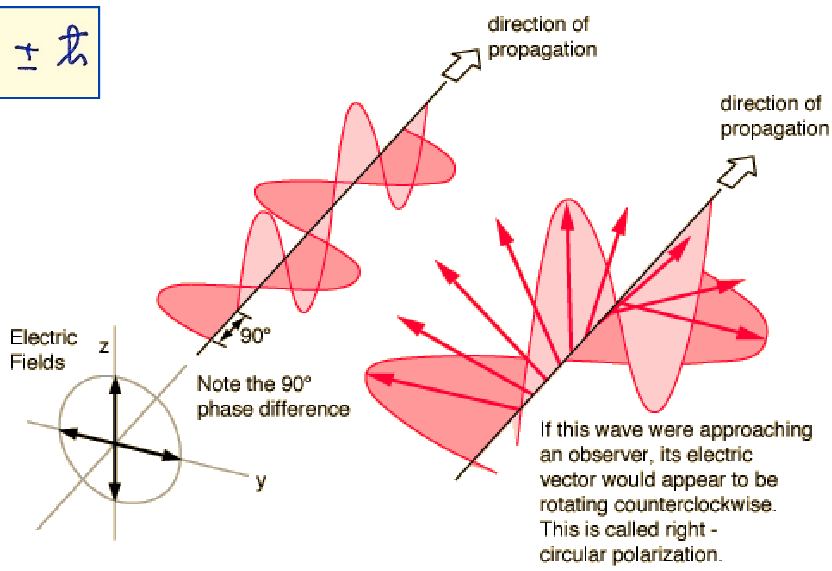
Arthur Compton
1892-1962

Diffusion inélastique d'un photon X par un électron d'un atome

Propriétés élémentaires du photon

Polarisation circulaire, spin et moment angulaire

$$\boxed{S_{\sigma\pm} = \pm\hbar}$$



Propriétés élémentaires du photon

Polarisation circulaire, spin et moment angulaire

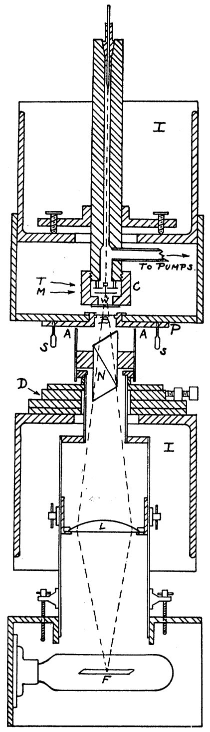


FIG. 1. Diagram of apparatus.

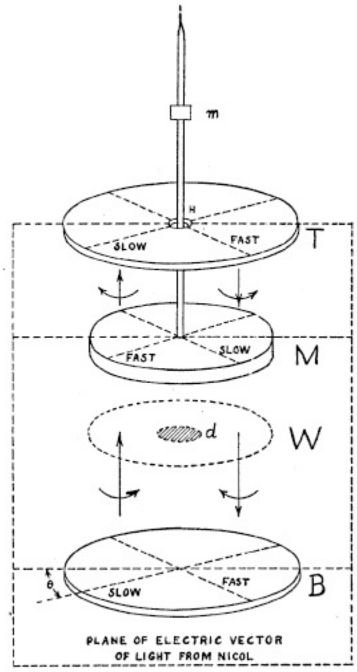


FIG. 3. Wave plate arrangement.

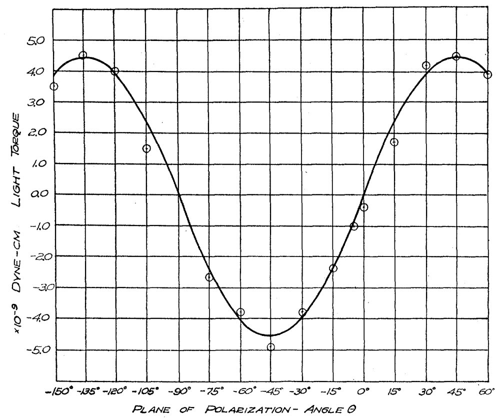


FIG. 8. Type II measurements: variation of light torque with angle between plane of polarization of light and the axes of the plates.

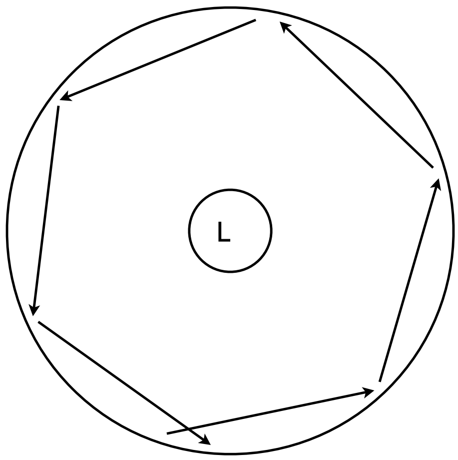
(1 dyn.cm = 10^{-7} N.m)

R.A. Beth, 1936

Propriétés élémentaires du photon

Polarisation circulaire, spin et moment angulaire

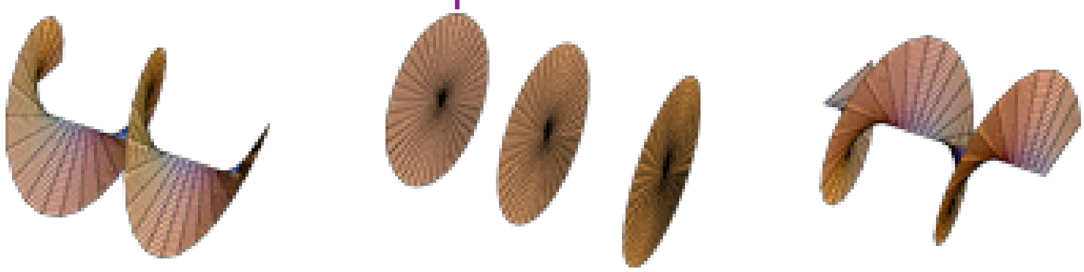
... et moment cinétique orbital



Propriétés élémentaires du photon

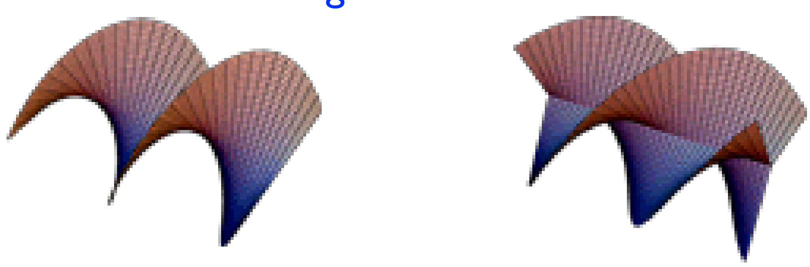
Polarisation circulaire, spin et moment angulaire

... et moment cinétique orbital



l=-1 l=0 l=+1

Laguerre-Gauss



l=+2 l=+3

Statistique des photons

Définitions

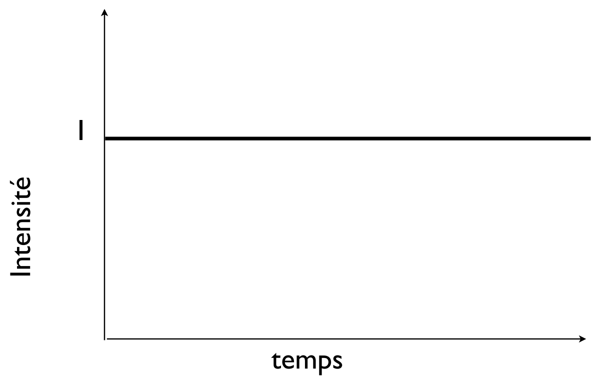
Densité de flux	$I(r)$	Puissance/Surface énergie/temps/surface	W/cm2 J/s/cm2
Nombre de photons/temps/surface	$\phi(r) = \dfrac{I(r)}{h\nu}$		Hz/cm2
Puissance incidente	$P = \iint_A I(r)\, dS$		W
Nombre de photons par unité de temps	$\Phi = \dfrac{P}{h\nu}$		Hz
Energie incidente durant T	$E = P.T$		J
Nombre moyen de photons	$\boxed{\bar{n} = \dfrac{E}{h\nu}}$		
Fluctuations	$\boxed{\sigma^2 = \langle (n-\bar{n})^2 \rangle}$		

Statistique des photons

Lumière cohérente et intensité constante

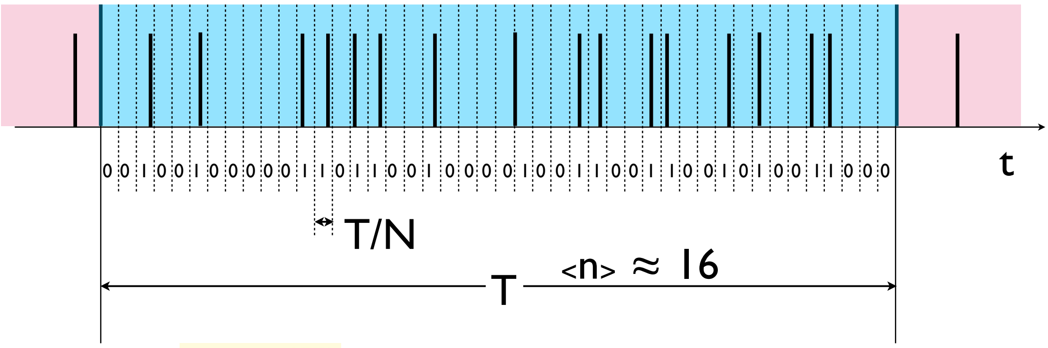
$I(r)\, e^{i(kr-\omega t)}$

$\langle I(r)\, e^{i(kr-\omega t)} \rangle_{\omega \tau \gg 2\pi} = cst$



Statistique des photons

Lumière cohérente



probabilité 1 clic : $p = \frac{\bar{n}}{N}$ probabilité 0 clic : $1-p$

probabilité n clic sur N intervalles	=	probabilité n fois 1clic	×	probabilité N-n fois 0 clic	×	nombre de distributions possibles

$$P_N(n) = p^n (1-p)^{N-n} C_N^n$$

Statistique des photons

Lumière cohérente

$$P_N(n) = p^n (1-p)^{N-n} C_N^n \qquad p = \frac{\bar{n}}{N}$$

$$= \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n}$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{N!}{(N-n)!\,N^n} \cdot \bar{n}^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n}$$

$$\frac{N!}{(N-n)!} = N \dots (N-n+1) \propto N^n$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N!}{N^n (N-n)!} = 1$$

$$\ln\left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = (N-n)\ln\left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)$$

$$\propto (N-n)\left(-\frac{\bar{n}}{N}\right) \propto -\bar{n}$$

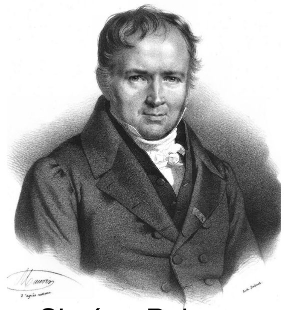
$$\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = e^{-\bar{n}}$$

Statistique des photons

Lumière cohérente

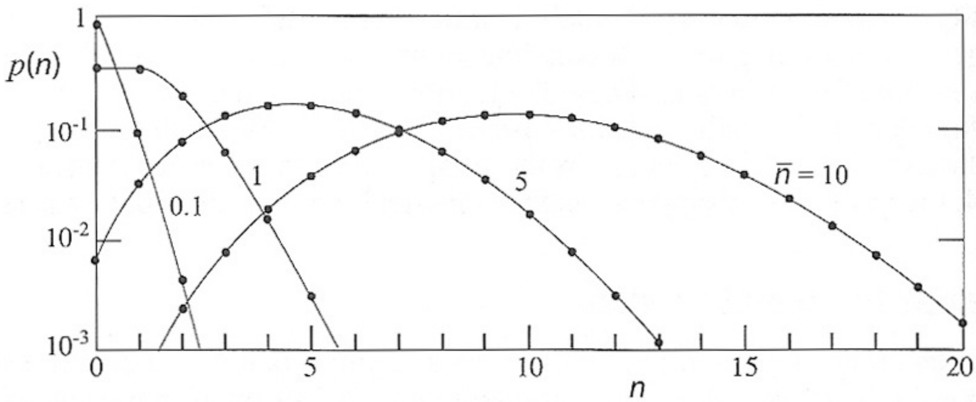
$$p_N(n) = \frac{1}{n!}\cdot\frac{N!}{(N-n)!\,N^n}\cdot\bar{n}^n\left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n}$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N!}{N^n\,(N-n)!} = 1 \qquad \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = e^{-\bar{n}}$$



Siméon Poisson
1781-1840

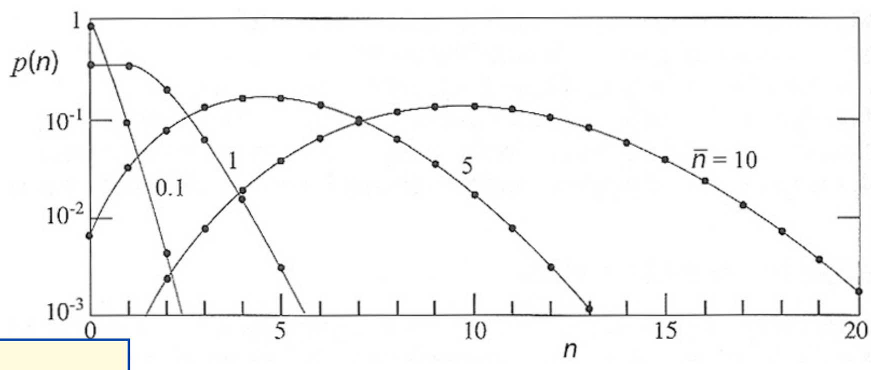
$$\boxed{p(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!}\,e^{-\bar{n}}}$$ **Distribution de Poisson**



Statistique des photons

Lumière cohérente

$$p(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!}\,e^{-\bar{n}}$$



n moyen $$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} n\,p(n) = \bar{n}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} np(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

$$= e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n-1)!}$$

$$= \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^{(n-1)}}{(n-1)!}$$

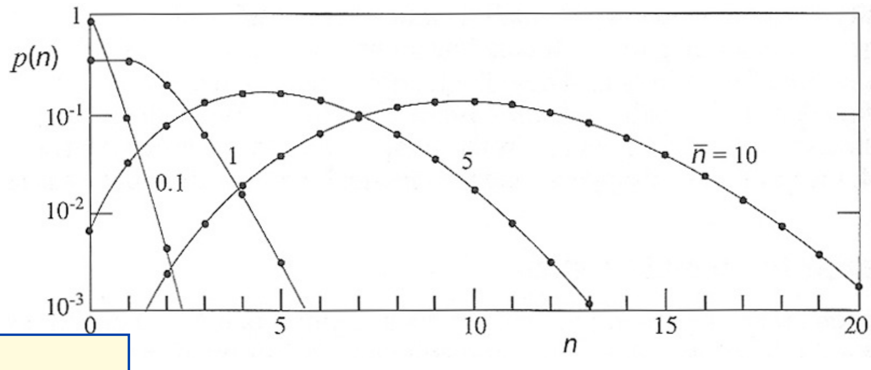
$$= \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!}$$

$$= \bar{n} e^{-\bar{n}} e^{+\bar{n}} = \bar{n}$$

Statistique des photons

Lumière cohérente

$$p(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$



n moyen $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} n\, p(n) = \bar{n}}$

écart type $\boxed{\sigma_{\bar{n}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n-\bar{n})^2 p(n) = \bar{n}}$

signal/bruit $\boxed{S = \frac{\bar{n}}{\sigma_n} = \sqrt{\bar{n}}}$ $\quad \frac{\sigma_{\bar{n}}}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[\bar{n}\to\infty]{} 0$

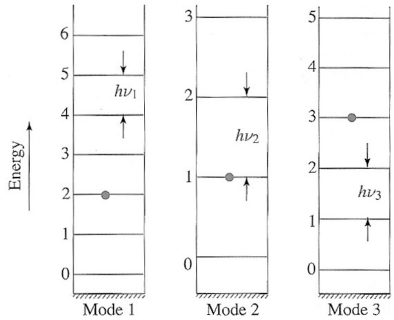
Statistique des photons

Emission thermique

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{p(II)}{p(I)} = e^{-\frac{\mathcal{E}_{II}-\mathcal{E}_I}{k_B T}}$$

$$\mathcal{E}_{n,m} = \left(n+\frac{1}{2}\right) h\nu_m$$

Chap. 3



$$p(n) = \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}\right) e^{-\frac{n h\nu}{k_B T}}$$

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p(n) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} = 1 + \frac{1}{\bar{n}}$$

$$p(n) = \left(1 - \frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)\left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n$$

$$p(n) = \frac{1}{1+\bar{n}}\left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n$$

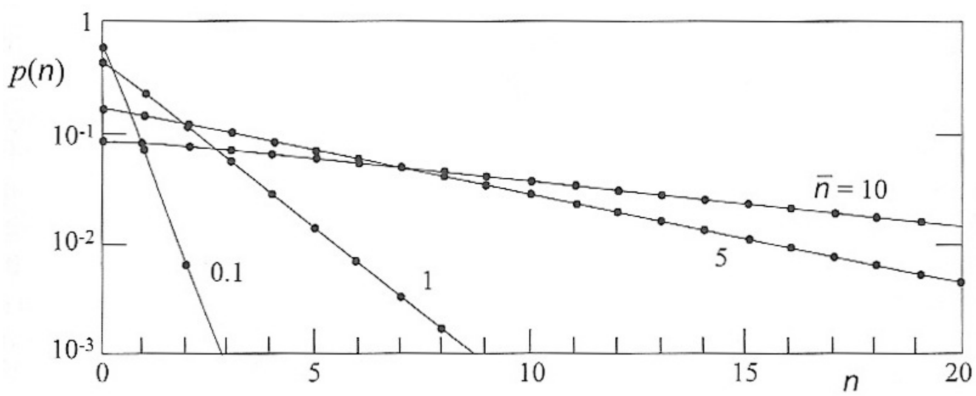
Statistique des photons

Emission thermique

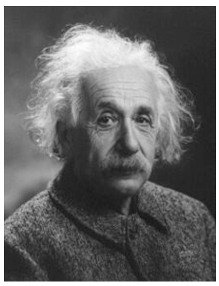
$$p(n) = \frac{1}{1+\bar{n}}\left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n$$

$$\boxed{p(n) = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{1+n}}}$$

Distribution de Bose-Einstein



Satyendra Bose
সত্যেন্দ্র নাথ বসু
1894 - 1974



Albert Einstein
1879-1955

Statistique des photons

Emission thermique

$$p(n) = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{1+n}}$$ Distribution de Bose-Einstein

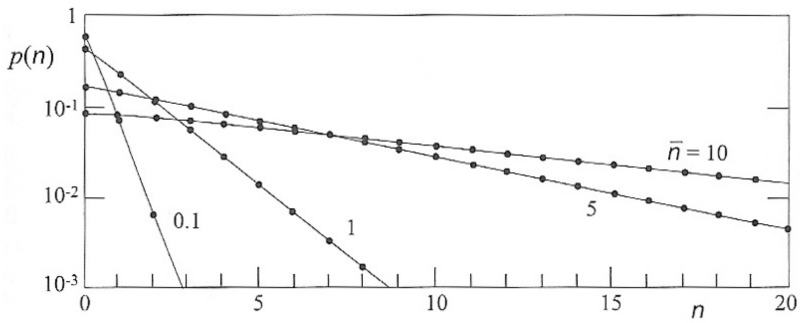
Statistique de Bose-Einstein
$$p(E) = \frac{g_E}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1}$$

Loi de Planck.
Potentiel chimique $\mu = 0$, $g_E = \rho_{3D}$
$$\frac{\rho_{em}(\nu)}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2/c^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

Statistique des photons

Emission thermique

$$p(n) = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{1+n}}$$



n moyen
$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p(n) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

écart type
$$\sigma_{\bar{n}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n-\bar{n})^2 p(n) = \bar{n} + \bar{n}^2$$

signal/bruit
$$S = \frac{\bar{n}}{\sqrt{\bar{n}+\bar{n}^2}} = \sqrt{\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}}$$

$$\frac{1}{S_{thermique}} \xrightarrow[\bar{n}\to\infty]{} 1$$

$$\frac{1}{S_{cohérent}} \xrightarrow[\bar{n}\to\infty]{} 0$$

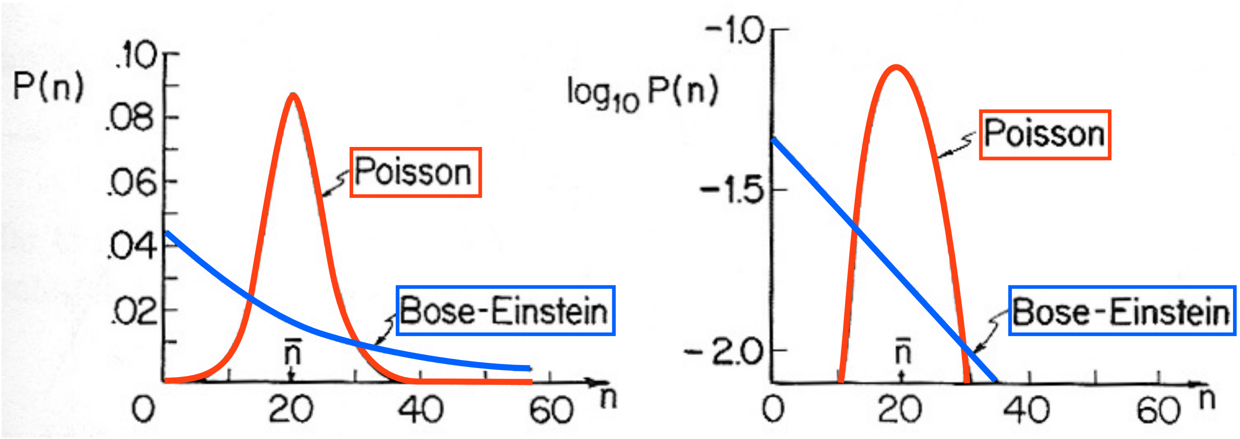
Statistique des photons

Source cohérente, I = Cst

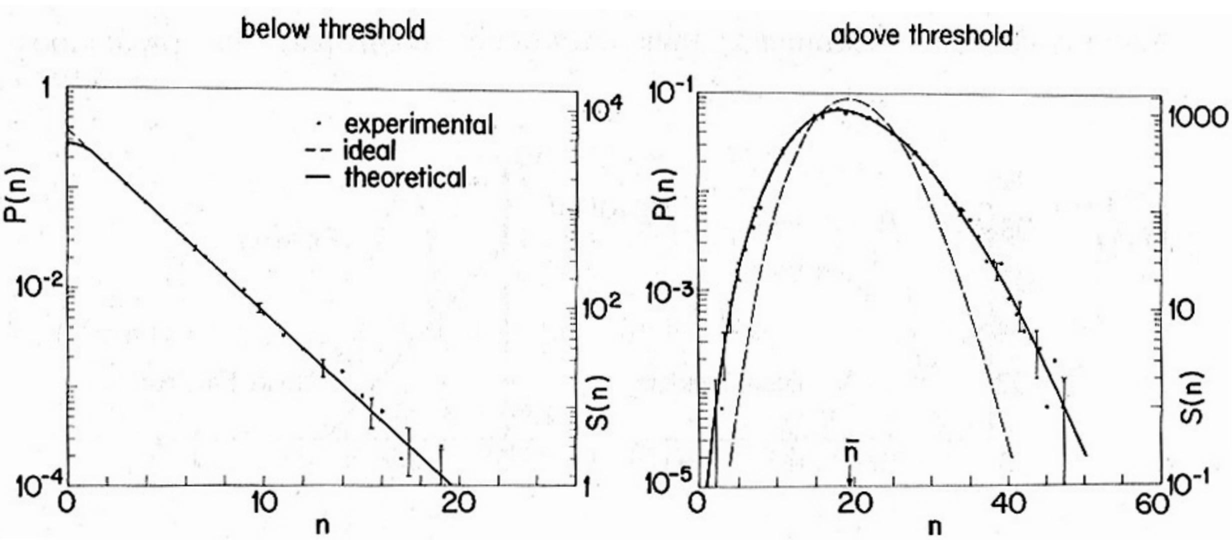
$$\boxed{p(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}}$$

Source thermique, corps noir

$$\boxed{p(n) = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{1+n}}}$$

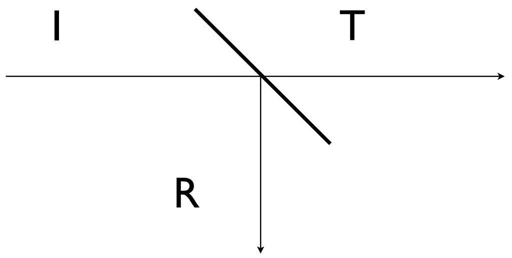


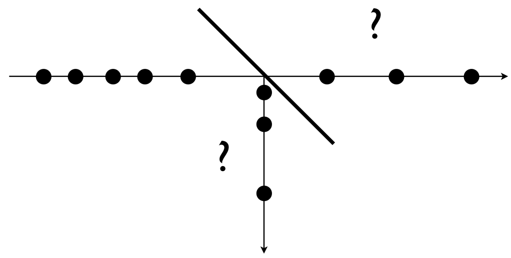
Statistique des photons



Statistique des photons

Partitionnement





R et T sont à considérer comme des probabilités
n incidents

probabilité m transmis : $p(m) = C_n^m \, T^m \, (1-T)^{n-m}$

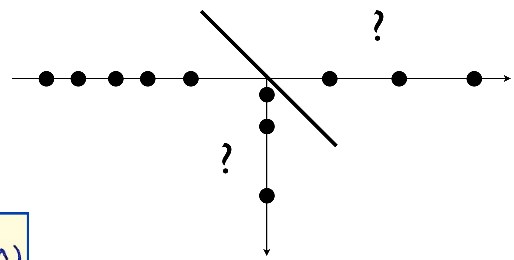
$$= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \, T^m \, (1-T)^{n-m}$$

$$\bar{m} = T n \qquad \sigma_m^2 = T(1-T)n = (1-T)\,\bar{m}$$

Statistique des photons

Partitionnement

$$p(m) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \, T^m \, (1-T)^{n-m}$$



statistique incident $p_i(n)$

$$\boxed{P_T(m) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^m \, T^n \, (1-T)^{n-m} \, p_i(n)}$$

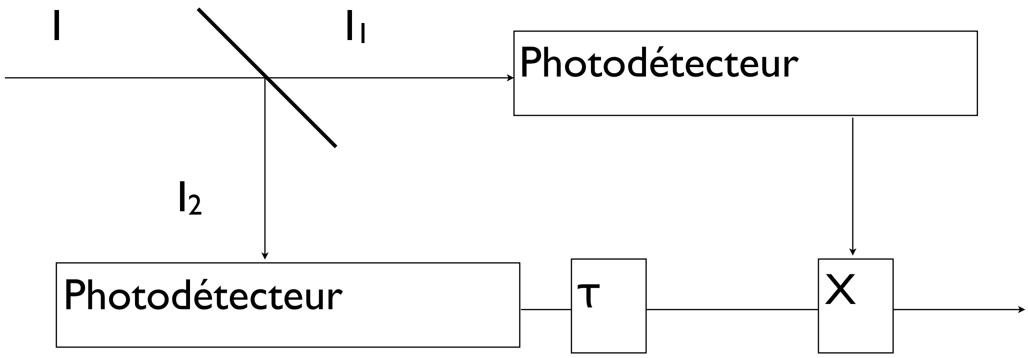
$$P_R(m) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^m \, (1-T)^m \, T^{n-m} \, p_i(n)$$

pour des distributions de Poisson et thermique :

$$\boxed{\bar{m} = T\,\bar{n}} \qquad \boxed{S_{col} = \sqrt{T\,\bar{n}}} \qquad \boxed{S_{th} = \sqrt{\frac{T\bar{n}}{T\bar{n}+1}}}$$

Statistique des photons

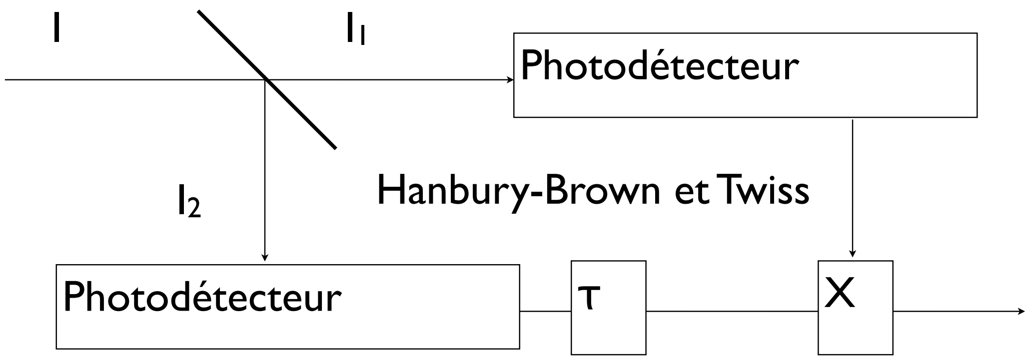
Corrélations



Statistique des photons

Corrélations

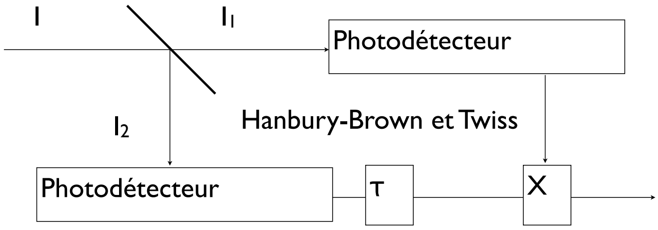
Robert Hanbury Brown
1916-2002



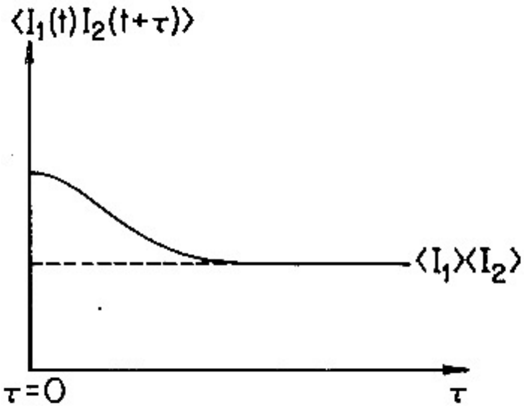
Statistique des photons

Corrélations

$$C(\tau) = \langle I_1(t)\, I_2(t+\tau) \rangle_t$$



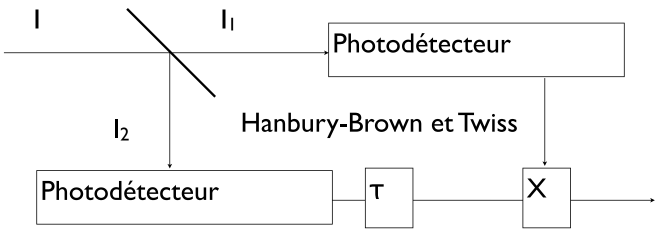
$$\langle I_1(t)\, I_2(t+\tau) \rangle > \langle I_1(t) \rangle \langle I_2(t) \rangle = I^2$$



Statistique des photons

Corrélations

corrélateur $\propto \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle$



$$C(0) = \langle I_1(t) . I_2(t) \rangle$$

$$\propto \langle E_1^*(t)\, E_2^*(t)\, E_1(t)\, E_2(t) \rangle$$

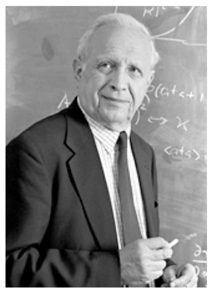
$$\propto \langle a^+ a^+ a\, a \rangle \qquad [a, a^+] = 1 \qquad N = a^+ a$$

$$a^+ a^+ a\, a = a^+ (a\, a^+ - 1)\, a$$

$$= a^+ a\, a^+ a - a^+ a$$

$$= (a^+ a)^2 - a^+ a$$

$$C(0) \propto \langle a^+ a^+ a\, a \rangle \propto \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle$$



Roy Glauber
né en 1925

Statistique des photons

Corrélations

$$C(0) \propto \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle \propto \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle$$

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$$

$$= \langle n^2 - 2n\langle n \rangle + \langle n \rangle^2 \rangle$$

$$= \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$$

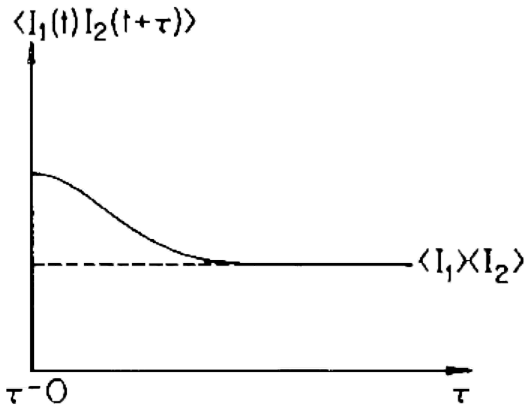
$$C(0) \propto \langle \Delta n^2 \rangle + \langle n \rangle^2 - \langle n \rangle$$

$$g^2(0) = \frac{\langle I_1(t)\, I_2(t) \rangle}{\langle I_1(t) \rangle \langle I_2(t) \rangle} = \frac{\langle \Delta n^2 \rangle + \langle n \rangle^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2} = \frac{\sigma_n^2 + \bar{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}^2}$$

Statistique des photons

Corrélations

$$\boxed{g^2(0) = \frac{\sigma_n^2 + \bar{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}^2}}$$

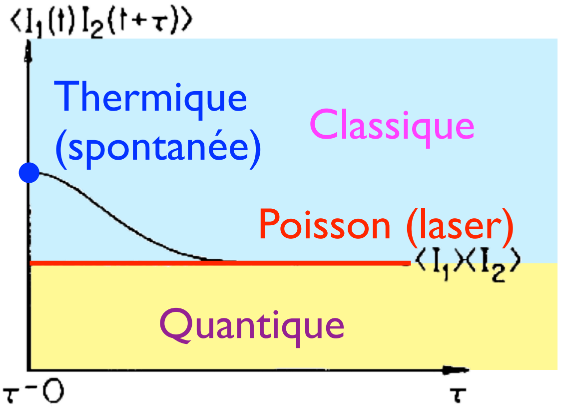


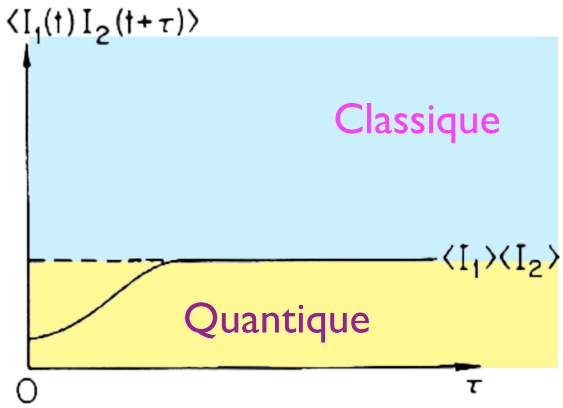
Source thermique $\quad \sigma_n^2 = \bar{n} + \bar{n}^2 \quad \boxed{g^2_{th}(0) = 2}$

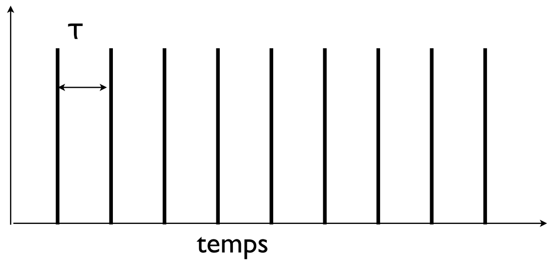
Source cohérente $\quad \sigma_n^2 = \bar{n} \quad \boxed{g^2_{coh}(0) = 1}$

Statistique des photons

Corrélations







Statistique des photons

Note :

La valeur minimum de $g^2(0)$ est :

$$g^2(0) = \frac{\left\langle (\Delta n)^2 \right\rangle + \langle n \rangle^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2} = 1 - \frac{1}{\langle n \rangle} + \frac{\left\langle (\Delta n)^2 \right\rangle}{\langle n \rangle^2} \geq 1 - \frac{1}{\langle n \rangle}$$

On définit aussi un facteur analogue à $g^2(0)$: le facteur Q de Mandel :

$$Q = \frac{\left\langle (\Delta n)^2 \right\rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle} = \frac{\left\langle (\Delta n)^2 \right\rangle}{\langle n \rangle} - 1 = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle} - 1$$

Le facteur Q de Mandel est ≥ -1 et ∈[-1, 0] pour les états quantiques de la lumière.

$$Q = \langle n \rangle \left(g^2(0) - 1 \right) \qquad g^2(0) = 1 + \frac{Q}{\langle n \rangle} \qquad S_{\text{signal/buit}} = \sqrt{\frac{\langle n \rangle}{1 + Q}}$$

Etats quantiques de la lumière

Oscillateur harmonique classique

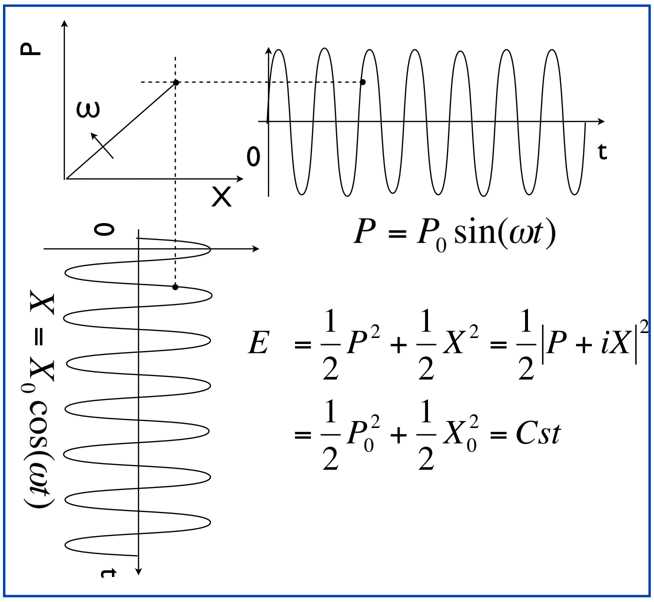
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \qquad p = m v = m \frac{d}{dt} x$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \\ &= \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega^2 x^2 \right) \end{aligned}}$$

$$\mathcal{E}_{cin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} P^2$$

$$\mathcal{E}_{pot} = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} X^2$$

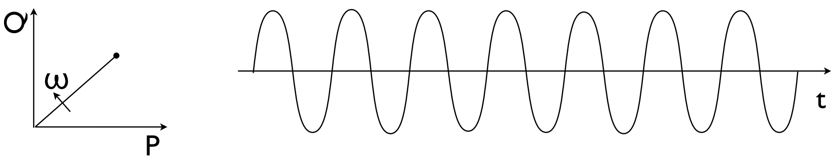


$$E = \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} X^2 = \frac{1}{2} |P + iX|^2$$

$$= \frac{1}{2} P_0^2 + \frac{1}{2} X_0^2 = Cst$$

Etats quantiques de la lumière

$$E = E_P.\cos(\omega t) + E_Q.\sin(\omega t)$$



$$[a, a^+] = 1$$

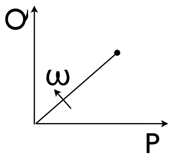
$$[\mathcal{E}_P, \mathcal{E}_Q] = i \frac{\hbar \omega}{\varepsilon_0 V} = 2i \cdot \mathcal{E}^2 \qquad \Delta \mathcal{E}_P . \Delta \mathcal{E}_Q \geq \mathcal{E}^2$$

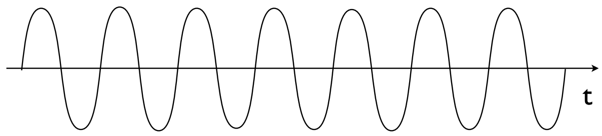
$$\Delta \mathcal{E}_P = \Delta \mathcal{E}_Q > \mathcal{E}$$

Etats quantiques de la lumière

$$\Delta \mathcal{E}_P = \Delta \mathcal{E}_Q = 0$$

Etat classique

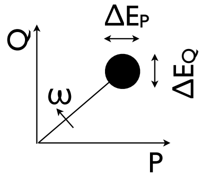


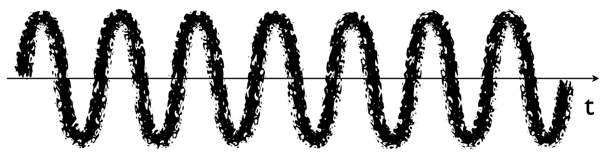


Etats quantiques de la lumière

$$\Delta \mathcal{E}_P = \Delta \mathcal{E}_Q = \varepsilon^2$$

Etat quantique





Etats quantiques de la lumière

Etat cohérent

$$\Delta \mathcal{E}_p = \Delta \mathcal{E}_q = \mathcal{E}^2$$

$$|\alpha\rangle = \sum_m e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle$$

$$p(m) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!}$$

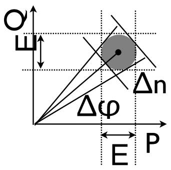
$$\langle \alpha, \beta \rangle \neq \delta_{\alpha\beta}$$

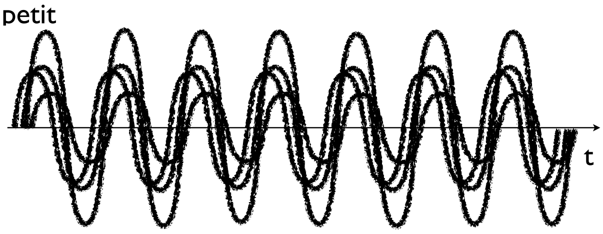
$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$N_\alpha = \langle \alpha | a^+ a | \alpha \rangle = |\alpha|^2$$

$$|\alpha|^2 = \bar{m}$$

Etat cohérent, |α| petit

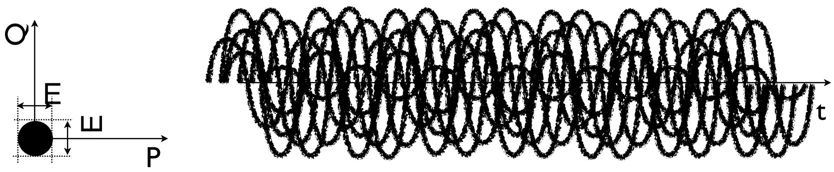




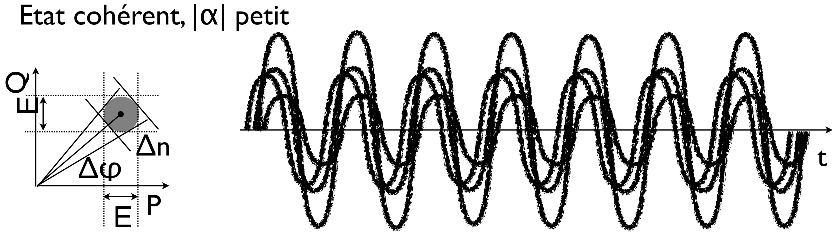
Etats quantiques de la lumière

Etat cohérent

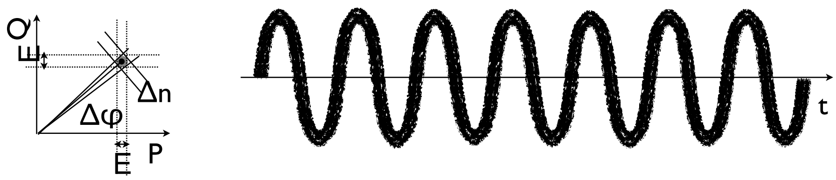
Etat du vide, n=0



Etat cohérent, |α| petit



Etat cohérent quasi classique, |α| grand



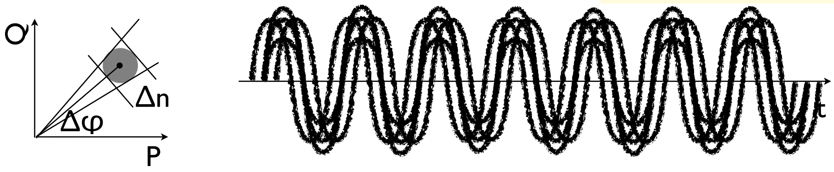
Etats quantiques de la lumière

Etat comprimé en amplitude

$\Delta \mathcal{E}_p \cdot \Delta \mathcal{E}_q \geqslant \mathcal{E}^2$

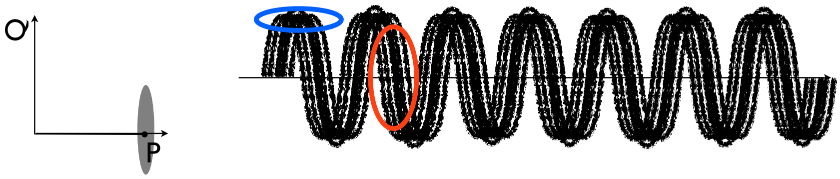
$\Delta \mathcal{E}_p = \Delta \mathcal{E}_q$

Etat cohérent classique



$\Delta \mathcal{E}_p \neq \Delta \mathcal{E}_q$

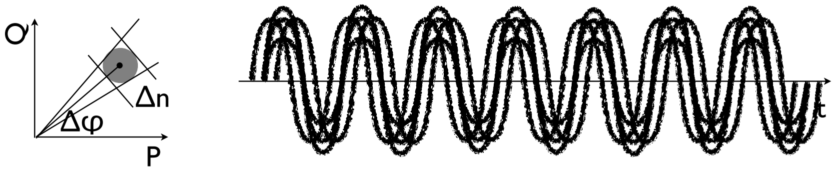
Etat comprimé en amplitude



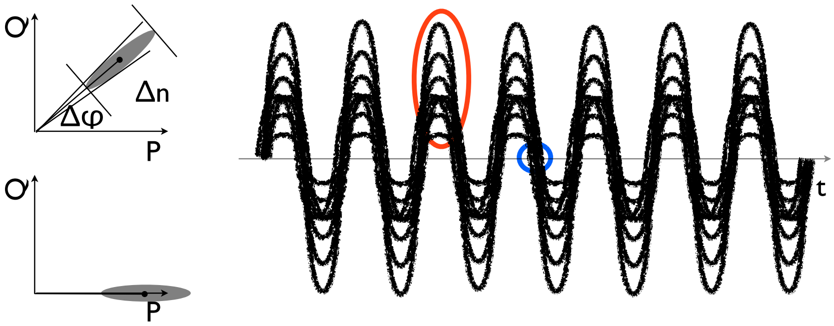
Etats quantiques de la lumière

Etat comprimé en phase

Etat cohérent classique



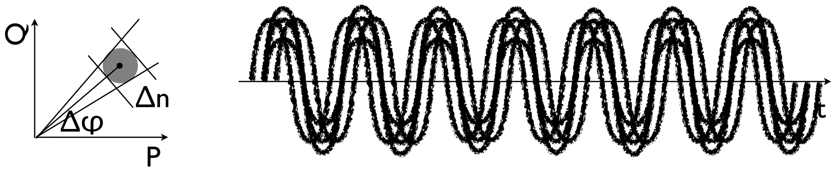
Etat comprimé en phase



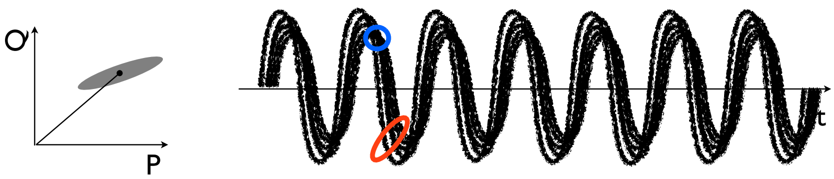
Etats quantiques de la lumière

Etat comprimé en quadrature

Etat cohérent classique



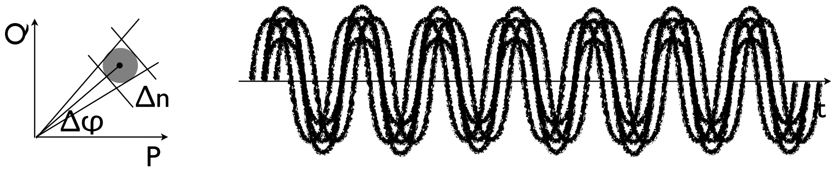
Etat comprimé sur une quadrature quelconque



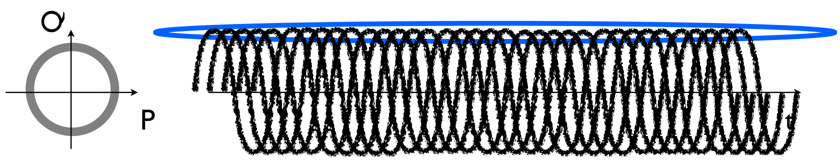
Etats quantiques de la lumière

Etat nombre

Etat cohérent classique



Etat nombre



Commentaires

- Il n'existe pas d'opérateur de position du photon
- Probabilité d'observation

$$p(r,t).dA.dt \propto I(r).dA.dt$$

- Un photon ne possède pas nécessairement une impulsion $p = \frac{\hbar}{\lambda} = \hbar k$
- Il n'existe pas d'opérateur de phase du photon

$e^{i\varphi}$ $\quad \hat{a} = (\hat{n}+1)^{1/2} e^{i\hat{\varphi}} \quad \hat{a}^\dagger = e^{-i\hat{\varphi}}(\hat{n}+1)^{1/2}$ (voir exercice)

$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$ $\qquad [N, \cos\varphi] = -i\sin\varphi$

$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$ $\qquad [N, \sin\varphi] = i\cos\varphi$

Commentaires

- Il n'existe pas d'opérateur de phase du photon

$[N, \cos\varphi] = -i\sin\varphi$ $\qquad \boxed{\Delta n . \Delta\cos\varphi \geq \frac{1}{2}|\langle \sin\varphi\rangle|}$

$[N, \sin\varphi] = i\cos\varphi$ $\qquad \boxed{\Delta n . \Delta\sin\varphi \geq \frac{1}{2}|\langle \cos\varphi\rangle|}$

état nombre $\quad \Delta n = 0 \quad \Delta\cos\varphi = \Delta\sin\varphi = \begin{cases} 1/2 & n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & n > 0 \end{cases}$

$\langle \sin\varphi\rangle = \langle\cos\varphi\rangle = 0$

état de phase $\quad \Delta\cos\varphi = 0 \qquad \Delta n \longrightarrow \infty$

état cohérent semi-classique $\quad |\alpha|^2 \gg 1 \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{2|\alpha|}$

$\Delta n . \Delta\cos\varphi = \frac{1}{2}|\sin\varphi|$

Commentaires

•Mode optique et état propre

$$E_{n,m} = \left(n + \tfrac{1}{2}\right) h\nu_m$$

⚠ $\boxed{\text{Ne pas confondre}}$

$$E_{n',m'} = \left(n' + \tfrac{1}{2}\right) h\nu_{m'} = E_{n,m}$$

$$\nu_{m'} = \frac{n + \frac{1}{2}}{n' + \frac{1}{2}} \nu_m$$

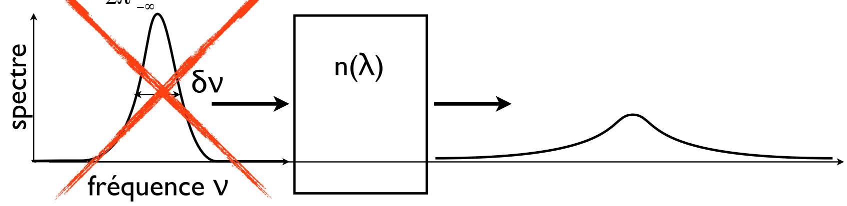
mais $\boxed{|n\rangle_{\nu_m} \neq |n'\rangle_{\nu_{m'}}}$!

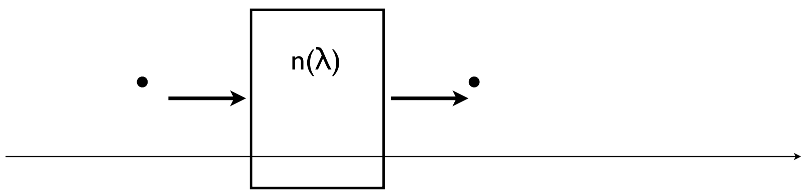
$$|n = 2\rangle_{photon\ rouge} \neq |n = 1\rangle_{photon\ bleu}$$

Commentaires

•Propagation et paquet d'onde

$$U(r,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\omega) e^{i(\omega t - kr)} d\omega$$





non, pas sous cette forme

Commentaires

•Propagation et paquet d'onde

oui, sous cette forme

$$|n\rangle$$ Etat nombre, stationnaire

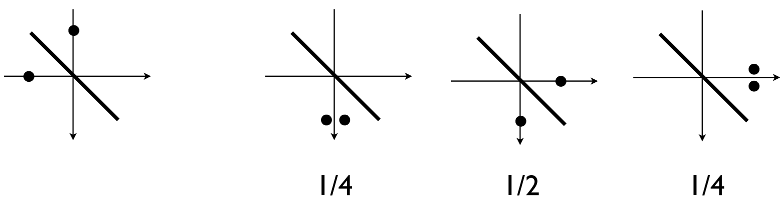
$$|\alpha\rangle = \sum_m e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle$$ Etat cohérent

$$|\varphi\rangle = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^{s} e^{in\varphi} |n\rangle$$ Etat de phase

Commentaires

•0 photon, 1 photon ... 2 photons

photons non-corrélés



photons corrélés