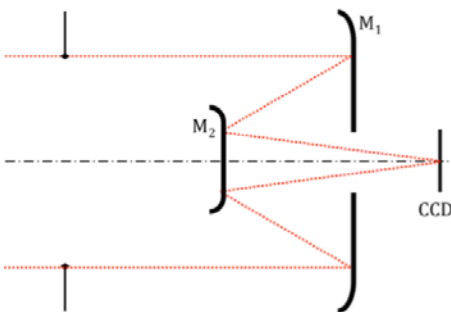


Série 1 21 Février 2018 Système optique : Introduction

Telescope de Cassegrain :

Un télescope dit de « Cassegrain » est typique des télescopes utilisés en astronomie. Il est composé de deux miroirs, le premier dit primaire (M1) qui collecte les rayons venant de l'objet à imager (que l'on considère ici placé à l'infini sur l'axe), et le second, dit secondaire (M2), qui refocalise les rayons sur le détecteur pour créer une image.

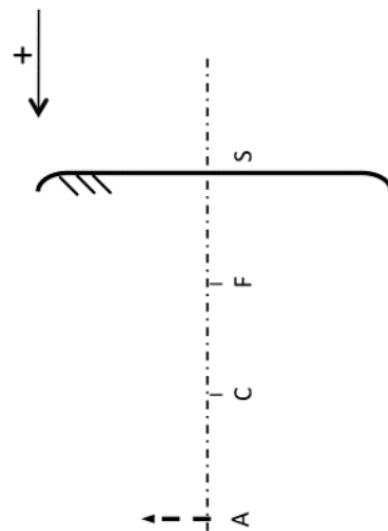
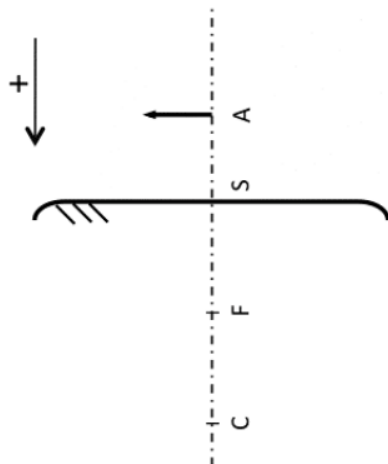
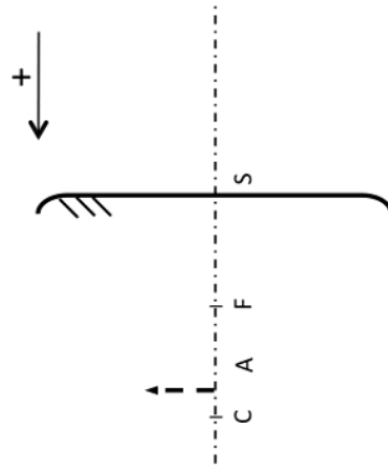
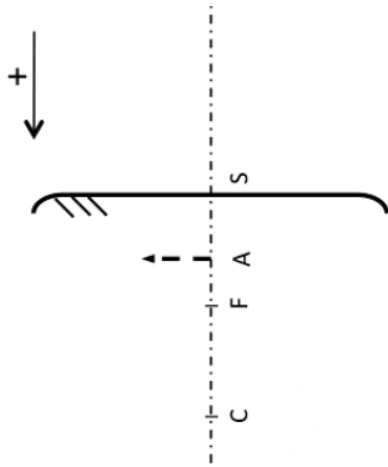


On considère les caractéristiques suivantes :

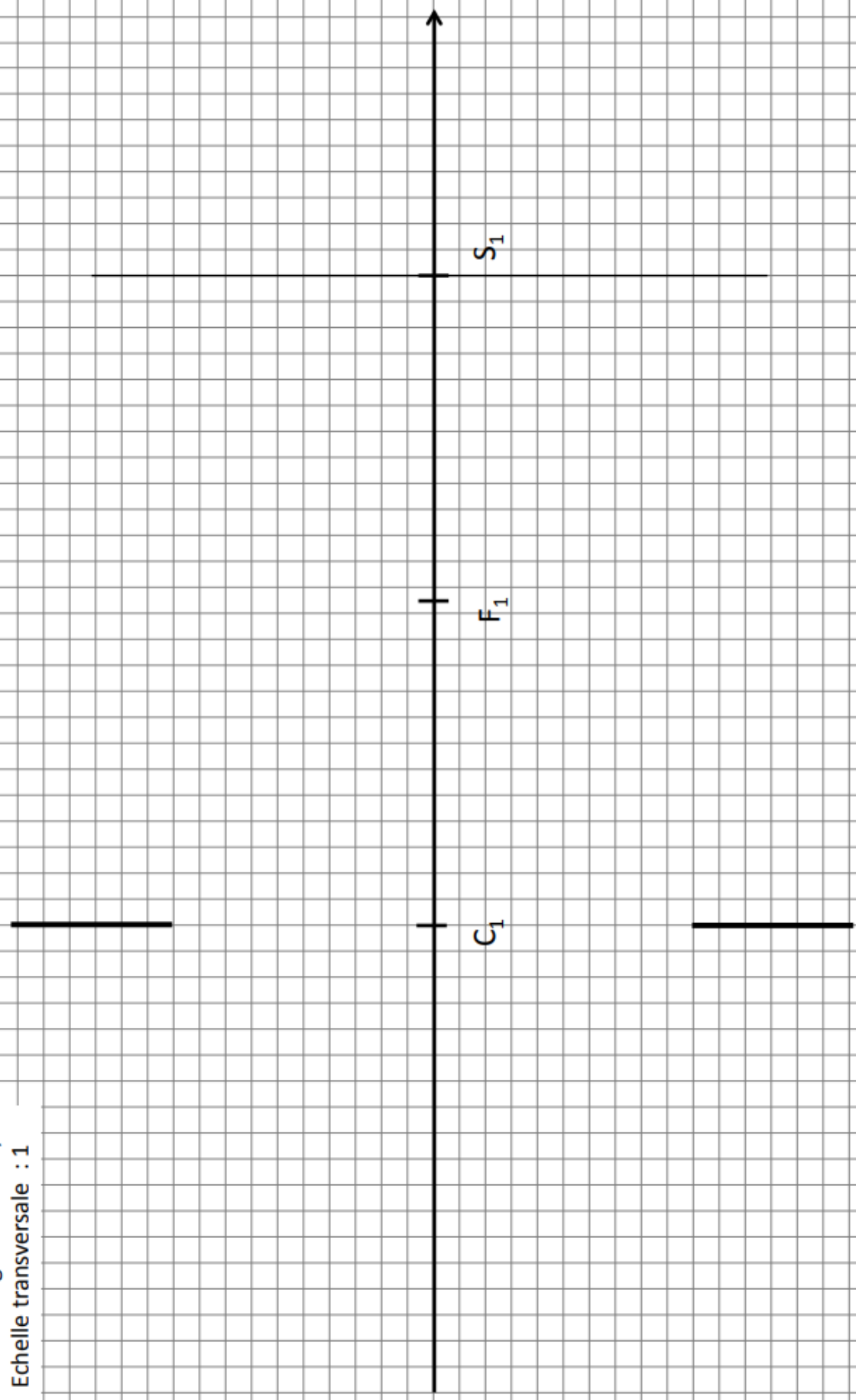
- $R_1 = 250 \text{ mm}$, le rayon de courbure de M1
- $R_2 = 100 \text{ mm}$, le rayon de courbure de M2
- $f_{tot} = 500 \text{ mm}$, la focale du système complet
- $N = 5$, le nombre d'ouverture du système complet
- Pupille d'entrée placée 250 mm devant M1
- Caméra de $512 * 512$ pixel de $20 \mu\text{m}$ de coté
- $R_1 = R_2 = 98\%$ la réflectivité des miroirs

- a) Faire un schéma du télescope. Placez la pupille d'entrée, le plan focal image et le plan principale H'. Déduire le signe de la focale du télescope
- b) Donner les conjugaisons successives entre le plan objet et le plan image au travers des deux miroirs. Donner les expressions de l'image intermédiaire y' et l'image finale y'' en fonction de l'angle apparent θ de l'objet.
- c) Donner l'expression du grandissement transverse g_2 (du second miroir) en fonction des différentes focales du système. Calculez sa valeur.
- d) Concernant le positionnement du miroir secondaire par rapport au primaire il y a plusieurs configurations possibles détaillées ci-après. Tracez l'image du point A au travers du miroir dans chacun des cas et donnez laquelle de ces configurations correspond au télescope de Cassegrain.
- e) En utilisant les formules de grandissement et de conjugaison pour un dioptre sphérique, calculez respectivement $\overline{F_1 F_2}$, $\overline{S_1 S_2}$ et enfin $\overline{S_1 F'}$ la position du plan focal du télescope. Donnez les valeurs numériques.
- f) « Dépliez » le système et retrouvez la distance entre les sommets des miroirs en utilisant le formule de Gullstrand : $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{\overline{S_1 S_2 \text{ déplié}}}{f_1' f_2'}$ (cette formule sera expliqué durant la séance)

- g) En utilisant la feuille quadrillée en annexe, faites un dessin à l'échelle indiqué et tracé l'image intermédiaire et finale de la pupille d'entrée du système.
- h) Quelle est l'ouverture du système. En supposant ce système limité par la diffraction (vous indiquerez la signification physique de cette condition sur la *Point Spread Function (PSF)*), quelle est la résolution dans le plan objet à 500nm.

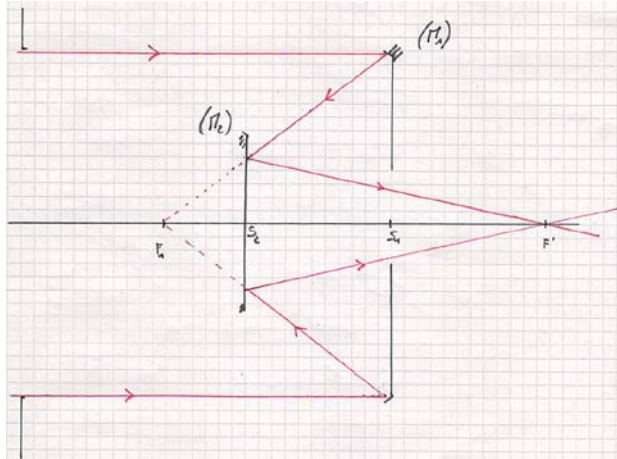


Echelle longitudinale : 1/2
Echelle transversale : 1

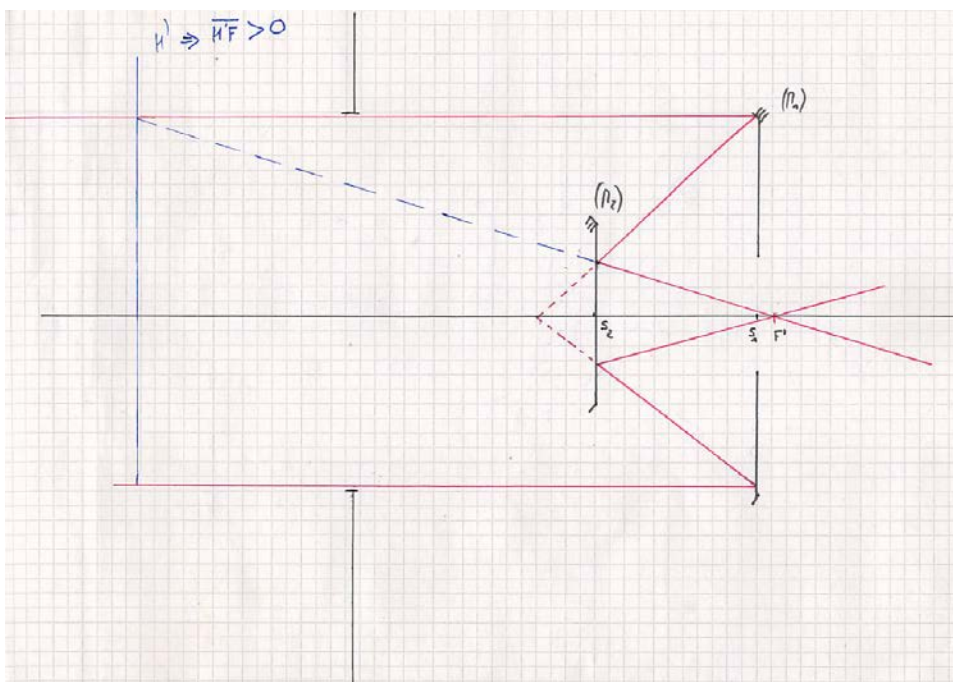


Correction :

a) On place les deux miroirs et le plan focal image sur le schéma ci-dessous :



On prolonge le dernier rayon pour trouver l'intersection avec le rayon incident afin de placer le plan principal image H' :



La focale du télescope est donc positive car $\overline{H'F} > 0$

b) On a les conjugaison suivante au travers de M_1 puis M_2 :

$$\infty \rightarrow y' \rightarrow y''$$

Pour la première conjugaison on utilise : $y' = -f_1 \cdot \theta$

Ensuite on peut exprimer de manière générale la conjugaison de y' au travers de M_2 en utilisant le grandissement du second miroir :

$$y'' = g_2 \cdot y'$$

Avec g_2 le grandissement transverse du second miroir.

De plus le système complet conjugue θ à y'' de la manière suivante :

$$y'' = f' \cdot \theta$$

D'où :

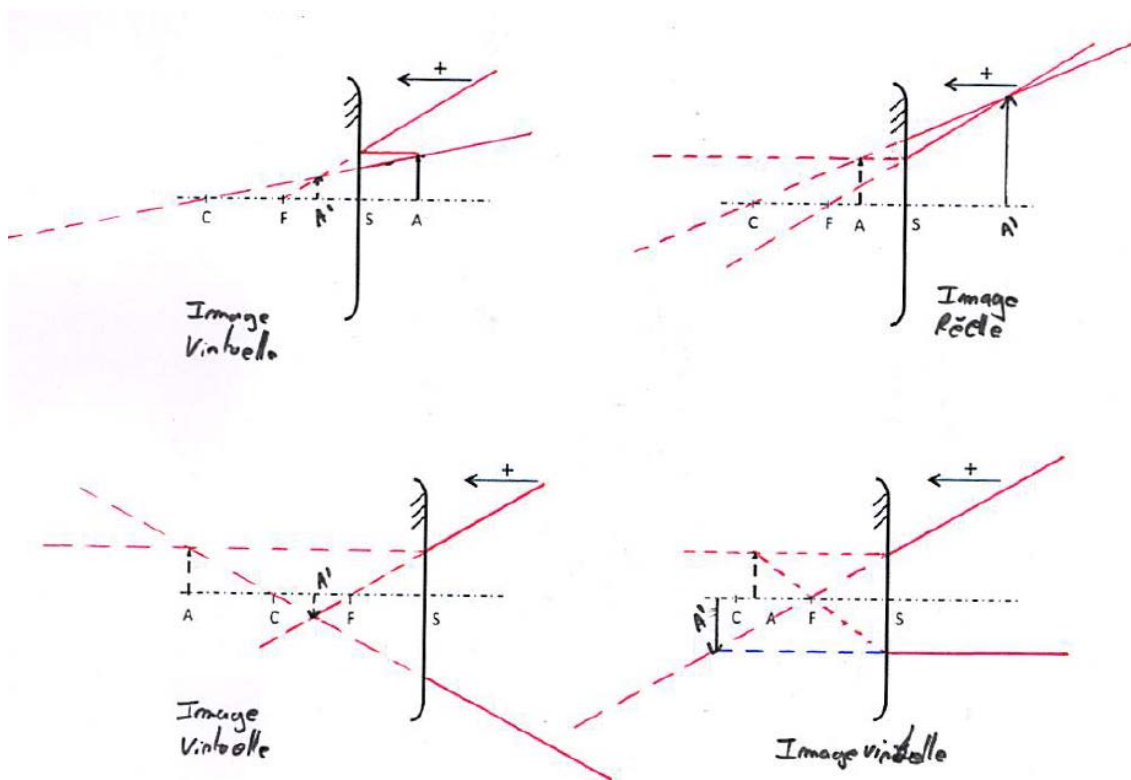
$$y'' = -f_1 \cdot \theta$$

c) On peut en déduire l'expression du grandissement transverse du second dioptré :

$$g_2 = -\frac{f'}{f_1}$$

A.N. : $g_2 = +4$

d) On a les quatre dessins suivant :



Le cas qui convient au miroir secondaire du télescope de Cassegrain et donc évidemment le 2nd avec un objet virtuel entre le sommet et le plan focal du miroir.

e) Ici on va utiliser deux formules importantes à retenir de manière général.

La formule de conjugaison avec origine au sommet pour un dioptré sphérique :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

Et la formule du grandissement pour un miroir sphérique convexe (qui diffère juste d'un signe pour un miroir concave !)

$$g_y = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}$$

Dans notre cas $A = F_1$ la focale du premier miroir. On peut donc écrire :

$$g_2 = -\frac{\overline{S_2F_2}}{\overline{F_2F_1}}$$

$$\text{A.N. : } \overline{F_2F_1} = 12.5 \text{ mm}$$

On peut donc facilement exprimer $\overline{S_1S_2} = \overline{S_1F_1} + \overline{F_1F_2} + \overline{F_2S_2}$

$$\text{A.N. : } \overline{S_1S_2} = -87.5 \text{ mm}$$

Enfin avec la formule de conjugaison avec $A = F_1, A' = F'$ et $S = S_2$ on obtient :

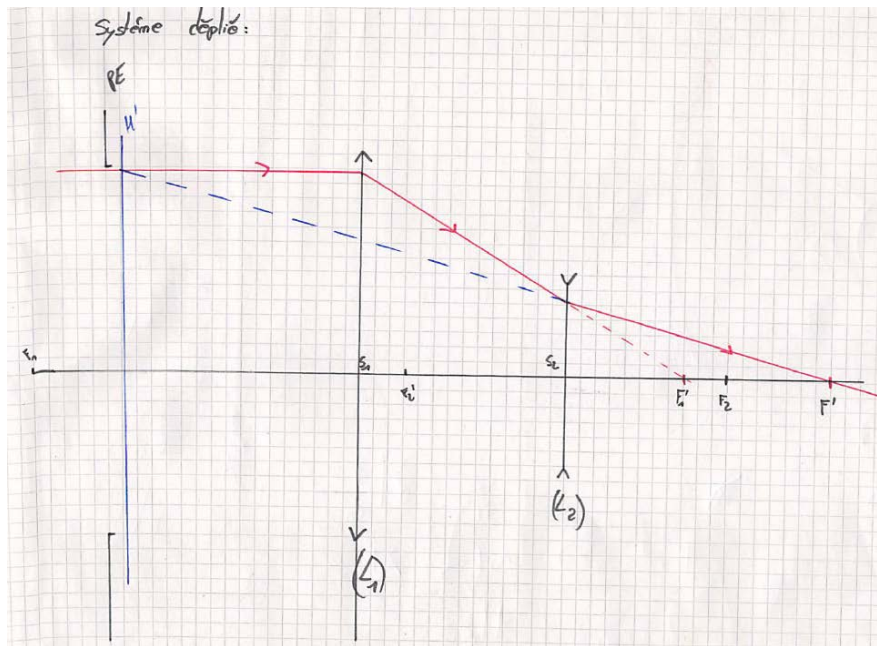
$$\text{A.N. : } \overline{S_1F'} = +87.5 \text{ mm}$$

f) La formule de Gullstrand donne une relation entre la focale de deux lentille, leur espacement et la focale du système totale :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{\overline{S_1S_2\text{déplié}}}{f_1'f_2'}$$

Le système déplié (ou on remplace les miroirs concaves par des lentilles convergentes équivalentes et les miroirs convexes par des lentilles divergentes) équivalent (Cf le dessin à la page suivante). Connaissant f_1, f_2 et f' on peut facilement montrer que :

$$\overline{S_1S_2} = -87.5 \text{ mm}$$



g) Voir Dessins en annexes PDF

h) Pour une conjugaison infini-foyer on a :

$$NA = \sin(\alpha') = \frac{1}{2N}$$

Avec NA l'ouverture numérique image et N le nombre d'ouverture défini par :

$$N = \frac{f'}{\Phi_{PE}}$$

N.A. : $\Phi_{PE} = 100 \text{ mm}$ et $NA \sim 0.1$

(Petit rappel, si le système optique est dans l'air il est IMPOSSIBLE d'avoir $NA > 1$ donc ayez un regard critique sur ce genre de résultat).

Si un système est limité par la diffraction, cela signifie que l'on néglige toute déformation du front d'onde due au passage au travers des optiques (autrement dit l'image d'un point sera un point et non une comète !).

Dans la réalité on considère que si la déformation du front d'onde RMS est inférieur ou égale à $\frac{\lambda}{14}$ le système est limité par la diffraction.

La PSF, ou réponse impulsionnelle du système (i.e. l'image un point) est une fonction d'Airy dont le diamètre de la première tâche brillante est donné par :

$$\Phi_{Airy} = 2.44\lambda N$$

Donc d'après le critère de Rayleigh, la résolution est donnée par le rayon de la tâche d'Airy donc ici :

$$Res = 3\mu m < \Phi_{pixel}$$

La résolution est donc limitée par la taille du pixel. En appliquant la formule de conjugaison on trouve la résolution angulaire objet :

$$Res_{\theta_{objet}} = \frac{\Phi_{pixel}}{f'} = 8''$$