ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Série 2

28 Fevrier 2018

Interférence à 2 et N ondes :

Ex 1 : Spectre en fréquence d'une impulsion amortie exponentiellement

Soit E(t) le champ d'une impulsion électromagnétique amortie exponentiellement:

$$E(t) = e^{-t/\tau_c}\cos(\omega_0 t) \qquad t \geq 0$$
$$et$$
$$E(t) = 0 \qquad t < 0$$

avec $\omega_0 >> 1/\tau_c$.

a) Représenter E(t) ainsi que son enveloppe.

b) Déterminer le spectre $S(\omega)$ d'une telle impulsion.

c) Quelle quantité physique est mesurée par un spectromètre (réseau de diffraction ou prisme de verre dispersif) ?

Comment peut-on mesurer l'enveloppe de E(t)?

Ex 2 : Interféromètre de Mach-Zehnder utilisé comme additionneur et soustracteur

L'interféromètre de Mach-Zehnder est représenté sur la figure ci-dessous: les miroirs M_1 et M_2 sont parfaitement réfléchissants et les lames A et C sont semi réfléchissantes. On a $AB=CD=3l/2$ et $BC=AD=2l$. L'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle, monochromatique de longueur d'onde (dans le vide) $\lambda=0.5\mu m$, située au foyer objet d'une lentille mince convergente L_c.

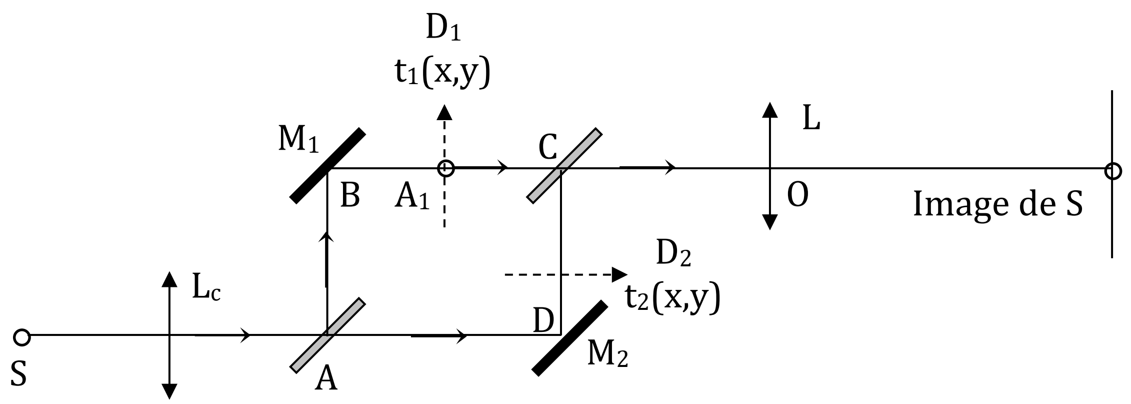


Figure 1 : Schéma de principe d'un interféromètre de Mach-Zender

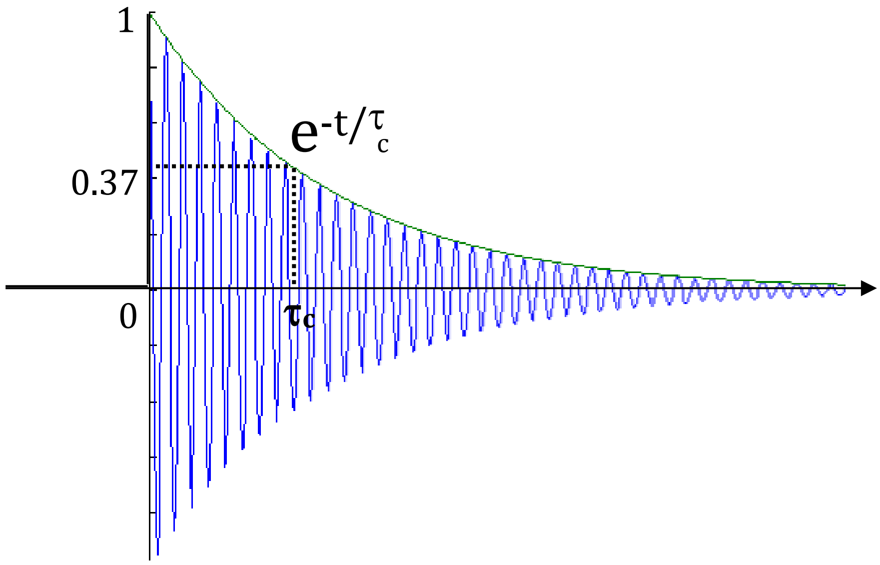
a) On place au milieu de BC un diaphragme D_1 de transmittance $t_1(x,y)$ et à une distance l de C sur CD un diaphragme D_2 de transmittance $t_2(x,y)$. Montrer que, dans le plan situé à la distance $2l$ d'une lentille L de distance focale image $f=l$, on observe une répartition d'intensité égale à t_1+t_2 si la distance de C à L est l.

b) Quel doit être l'épaisseur d'une lame à face parallèles, d'indice 1.5, qu'il faudrait placer normalement sur le trajet AD, pour obtenir une répartition d'intensité égale à t_1-t_2?

Correction

Ex 1 : Spectre en fréquence d'une impulsion amortie exponentiellement

a) L'enveloppe de E(t) est $U(t)e^{-t/\tau_c}$. Avec U(t) est la fonction marche: U(t)=0 pour t<0 et U(t)=1 pour t≥0.



b) $TF\{E(t)\}_k = TF\{U(t)e^{-t/\tau_c}\}_k \otimes TF\{\cos(\omega_0 t)\}_k$ On a utilisé le fait que la TF d'un produit de deux fonctions est le produit de convolution des TF de chaque fonction.

$$TF\{\cos(\omega_0 t)\}_\omega = \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

Ce terme détermine la position en fréquence du spectre, à savoir ω_c.

$$TF\{U(t)e^{-t/\tau_c}\}_\omega = \int_0^\infty e^{-t/\tau_c}e^{i\omega t}dt = \left[-\frac{1}{1/\tau_c - i\omega}e^{-(1/\tau_c - i\omega)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{1/\tau_c - i\omega}$$

Ce terme permet de déterminer la forme du spectre. En multipliant par $\overline{(1/\tau_c - i\omega)}$ on peut réécrire $TF\{U(t)e^{-t/\tau_c}\}_\omega = \dfrac{1/\tau_c}{(1/\tau_c)^2+\omega^2} + i\dfrac{\omega}{(1/\tau_c)^2+\omega^2}$

D'où le spectre S(ω) (densité spectrale de puissance):

$$S(\omega) = \left|TF\{U(t)e^{-t/\tau_c}\}_\omega\right|^2 = \frac{1}{(1/\tau_c)^2+\omega^2}$$

On reconnaît une Lorentzienne. La largeur à mi-hauteur ce calcule facilement et vaut $2/\tau_c$.

(Remarque : ce genre de calcul intervient aussi quand on a affaire à des pertes et à un problème de cohérence spatiale. Le profil de départ est le profil d'intensité $I(z)=I_0e^{-\alpha z}$ qui permet de définir le coefficient de perte α. Le champ est alors $E(z)=E_0e^{-(\alpha/2)z}$. Il faut faire attention au facteur 2.)

c) On utilise soit un spectromètre à prisme ou à réseau pour mesurer le spectre $S(\omega)$. Cela permet d'obtenir le poids relatif de chaque composante du spectre de la source. Le signal mesuré est donc par définition la densité spectrale de puissance.

d) L'enveloppe de E(t) n'est rien d'autre que le module du degré complexe de cohérence temporelle $|\gamma_t(\tau)| = U(\tau)e^{-\tau/\tau_c}$, qui est égal à la visibilité obtenue dans une expérience d'interférence de type spectromètre par transformée de Fourier.

Ex 2 : Interféromètre de Mach-Zehnder utilisé comme additionneur et soustracteur

a) Comme les trajets SABC et SADC sont égaux, en l'absence de diaphragme, les ondes planes issues de L_c sont en phase à la sortie en C. La lentille L forme une image renversée de D_1, de même dimension, puisque les distances de l'objet et de l'image au centre O de L sont égales à $2l$. De même pour le diaphragme D_2 dont l'image se forme dans le plan d'observation. Il en résulte que, dans ce plan, la répartition de l'intensité est proportionnelle à t_1+t_2.

b) Si on interpose une lame sur le trajet AD, la différence de phase supplémentaire introduite est:

Pour $\Delta\phi = \pi$, i.e. $e = \dfrac{\lambda}{2(n-1)}$ =0.5µm, les deux ondes à la sortie en C sont en opposition de phase. Il en résulte que la répartition de l'intensité est alors proportionnelle à t_1-t_2.

d'où $V = |\gamma(\tau)| = \left|\cos\left(\pi \dfrac{\tau}{\tau_c}\right)\right| = \left|\cos\left(\pi \dfrac{L}{L_c}\right)\right|$