Série 3

7 Mars 2018

Cohérence

Fonction d'autocohérence (autocorrélation)

a) On considère une onde harmonique d'amplitude E_0 et de fréquence ω. Calculer la fonction d'autocohérence.

b) Représenter l'évolution de l'amplitude du champ, de la fonction d'autocohérence, du degré de cohérence complexe et de la fonction de contraste obtenue avec un interféromètre de Michelson.

c) On considère un champ résultant de la superposition de deux vibrations harmoniques de fréquences ω_1 et ω_2 différentes et d'amplitude E_{01} et E_{02}.(on considère ces deux amplitudes réelles). Calculer l'amplitude du champ et la fonction d'autocohérence.

d) Représenter l'évolution de l'amplitude du champ considéré en c), de sa fonction d'autocohérence, du degré de cohérence complexe et de la fonction de contraste.

e) Généraliser le cas précédent à M ondes et au cas d'un spectre continu d'ondes harmoniques.

(Aide : on utilisera la formule $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int e^{i2\pi(\nu-\nu')}dt = \delta(\nu-\nu')$)

f) Représenter qualitativement l'évolution de l'amplitude du champ, de la fonction d'autocohérence, du degré de cohérence complexe et de la fonction de contraste pour la lumière d'une lampe à vapeur de mercure.

g) Même question pour de la lumière totalement incohérente.

h) Comment définit-on la fonction d'autocohérence dans le cas de signaux d'énergie totale finie ?

i) Calculer ainsi le degré de cohérence complexe et la fonction de contraste de l'onde suivante, définie comme une onde harmonique modulée par une gaussienne de largeur σ :

$$E(t) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-i\omega t)\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

Quelle est la valeur du temps de cohérence du signal ?

(aide : $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t^2/\sigma^2)dt = \sigma\sqrt{\pi}$)

Correction

Ex 1 : Fonction d'autocohérence

a) D'après la définition de la fonction d'autocohérence:

$$\Gamma(\tau) = \langle E^*(t)E(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E^*(t)E(t+\tau)dt$$

Pour l'onde harmonique, $E(t)=E_0\cos(\omega t)$ et son amplitude complexe s'écrit :

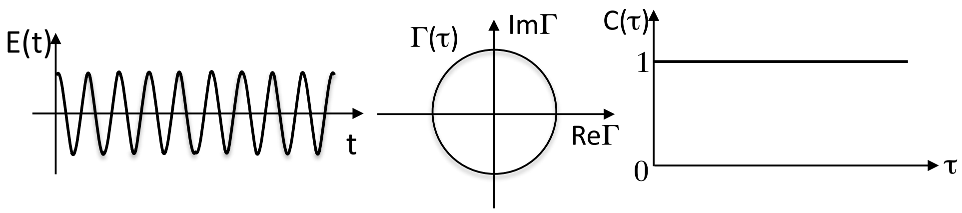
$E(t)=E_0 e^{-i\omega t}$

D'où :

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |E_0|^2 e^{i\omega t}e^{-i\omega(t+\tau)}dt = |E_0|^2 e^{-i\omega\tau}$$

la fonction de cohérence dépend du retard τ de façon harmonique.

b) Les graphes ci-dessous donnent les résultats demandés :



c) Pour donner une représentation de la somme de deux ondes harmoniques, il est commode de passer en notation complexe. En effet la somme se transforme facilement en produit de vibrations harmonique.

L'amplitude complexe du champ E(t) s'écrit :

$$\tilde{E}(t) = E_{01}e^{i\omega_1 t} + E_{02}e^{i\omega_2 t}$$

et

$$E(t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{E}(t)\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tilde{E}(t) + \tilde{E}^*(t)\right)$$

En posant $\overline{E} = \frac{1}{2}(E_{01} + E_{02})$ et $\Delta E = \frac{1}{2}(E_{01} - E_{02})$, ainsi que $\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ et $\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$, il vient :

$$E(t) = \tfrac{1}{2}\overline{E}e^{-i\overline{\omega}t}(e^{-i\Delta\omega t} + e^{i\Delta\omega t}) + \tfrac{1}{2}\Delta E e^{-i\overline{\omega}t}(e^{-i\Delta\omega t} - e^{i\Delta\omega t}) + \text{c.c.}$$
$$E(t) = 2\overline{E}\cos(\overline{\omega}t)\cos(\Delta\omega t) - 2\Delta E\sin(\overline{\omega}t)\sin(\Delta\omega t)$$

Il s'agit d'un signal de battement modulé.

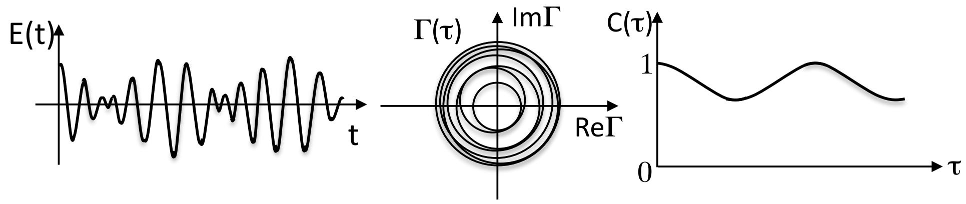
La fonction d'autocohérence, calculée pour la vibration complexe de $\tilde{E}(t)$, correspond à la superposition de vibrations harmoniques :

$$\Gamma(\tau) = \left\langle \tilde{E}^*(t)\tilde{E}(t+\tau)\right\rangle = I_1 e^{-i\omega_1\tau} + I_2 e^{-i\omega_2\tau}$$

avec $I_1 = |E_{01}|^2$ et $I_2 = |E_{02}|^2$. Le degré d'autocohérence complexe vaut alors $\gamma(\tau) = \Gamma(\tau)/(I_1 + I_2)$. La courbe $\gamma(\tau)$ évolue dans le plan complexe entre les cercles $|\gamma(\tau) = 1|$ et $\gamma(\tau) = |I_1 - I_2|/(I_1 + I_2)$. La fonction de contraste vaut :

$$C(\tau) = |\gamma(\tau)| = \frac{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos((\omega_1 - \omega_2)\tau)}}{I_1 + I_2}$$

d) Les graphes ci-dessous donnent les résultats demandés :



e) Dans le cas de M ondes le champ s'écrit $\tilde{E}(t) = \sum_{m=1}^{M} E_{0m} e^{-i\omega_m t}$, d'où :

$$\Gamma(t) = \left\langle \tilde{E}^*(t)\tilde{E}(t+\tau) \right\rangle = \sum_{m=1}^{M} |E_{0m}|^2 e^{-i\omega_m \tau}$$

Dans le cas limite d'un spectre continu d'ondes harmoniques, on peut écrire :

$$\tilde{E}(t) = \int_0^\infty E_0(\nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu$$

On a alors :

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_0^\infty E_0^*(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \int_0^\infty E_0(\nu') e^{-i2\pi\nu'(t+\tau)} d\nu'$$

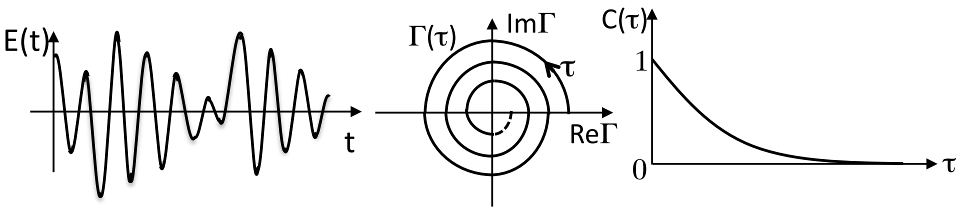
$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty E_0^*(\nu) E_0(\nu') \delta(\nu - \nu') e^{-i2\pi\nu'\tau} d\nu' d\nu$$

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty |E_0(\nu)|^2 e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu$$

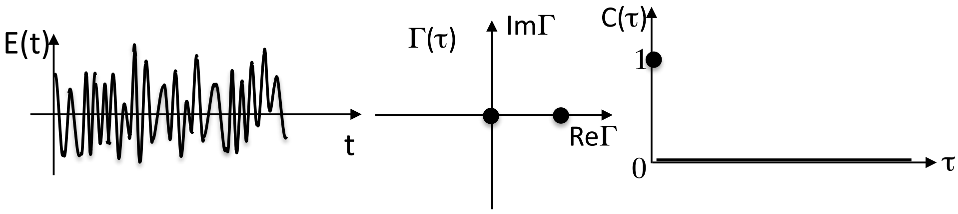
$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty W(\nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu$$

La fonction d'autocohérence est la transformée de Fourier du spectre de puissance du champ complexe. Ceci n'est rien d'autre que le théorème de Wiener-Kinchine en considérant W(ν) nul pour ν négatif.

f) Les graphes ci-dessous donnent les résultats demandés:



g) Les graphes ci-dessous donnent les résultats demandés:



h) Pour un signal d'énergie finie, il faut supprimer la division par T et intégrer sur tout l'axe des réels :

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} E^*(t)E(t+\tau)dt$$

i) Pour le paquet d'onde gaussien, on a donc :

$$\Gamma(\tau) = \frac{|E_0|^2}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega t - \frac{t^2}{2\sigma^2})\exp(-i\omega(t+\tau) - \frac{(t+\tau)^2}{2\sigma^2})dt$$
$$\Gamma(\tau) = \frac{|E_0|^2}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{\tau^2}{4\sigma^2})\exp(-i\omega\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{(t+\tau/2)^2}{\sigma^2})dt$$
$$\Gamma(\tau) = \frac{|E_0|^2}{2\sqrt{\pi}\sigma}\exp(-\frac{\tau^2}{4\sigma^2})\exp(-i\omega\tau)$$

La fonction de contraste est donc aussi une gaussienne :

$$C(\tau) = |\gamma(\tau)| = \left|\exp(-\frac{\tau^2}{4\sigma^2})\exp(-i\omega\tau)\right| = \exp(-\frac{\tau^2}{4\sigma^2})$$

Le temps de cohérence τ_c est défini comme le décalage temporel pour lequel la fonction de contraste a chuté d'un facteur 1/e. Il vaut donc dans le cas présent : $\tau_c = 2\sigma$