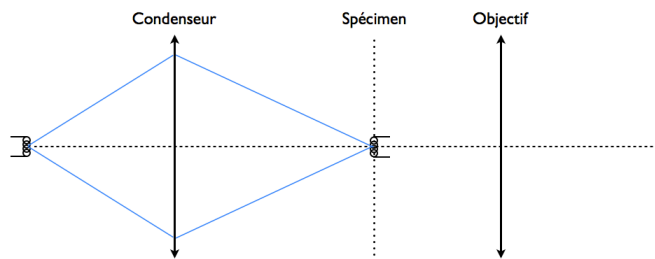


**Série 4**  
**14 Mars 2018**  
**Cohérence spatiale**

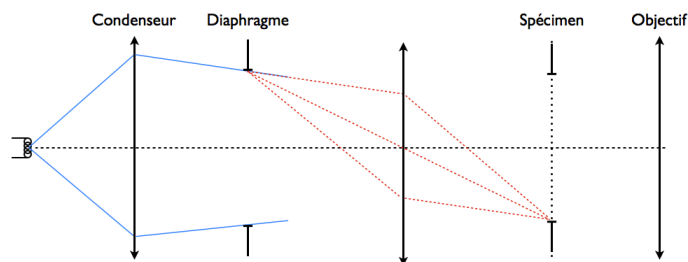
Ex 1 : Illumination de Köhler

Historiquement, il existe deux méthodes pour éclairer un objet que l'on observe sous un microscope. La première, appelée « illumination critique » utilise une lentille condenseur pour faire l'image de la source de lumière dans le plan de l'objet étudié. La seconde, dite « de Köhler » utilise une seconde lentille pour faire l'image d'un diaphragme intermédiaire, lui-même éclairé par un condenseur.

**Illumination critique**



**Illumination de Köhler**



- Laquelle de ces méthodes permet d'obtenir la meilleure uniformité d'éclairage de l'objet?
- On suppose une source lumineuse dont l'intensité ne dépend pas de l'angle d'émission. Montrer que la lentille condenseur collecte une quantité de lumière qui varie avec l'angle  $\theta$  formé entre l'axe optique et la position de l'élément de surface unitaire considéré.
- Que faire pour maximiser l'uniformité dans le cas de l'illumination de Köhler? Quelle conséquence sur la cohérence spatiale de l'illumination ?

Ex. 2 : Synthèse d'ouverture. Interféromètre à deux télescopes.

- a) Rappeler l'expression du pouvoir de résolution maximal d'un instrument optique d'ouverture  $D$ .
- b) Malheureusement cela n'est vrai qu'en absence d'atmosphère : les turbulences atmosphériques sont responsables d'une très rapide détérioration du pouvoir de résolution, ce qui fait que au-delà d'un diamètre de 20-50cm la résolution angulaire n'atteint pas la valeur limite théorique.

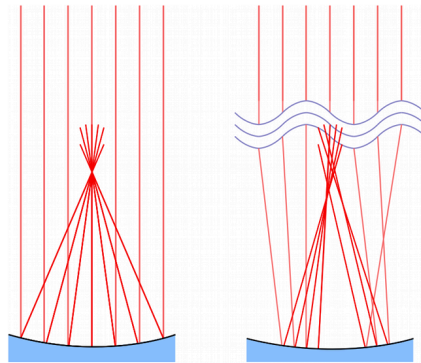


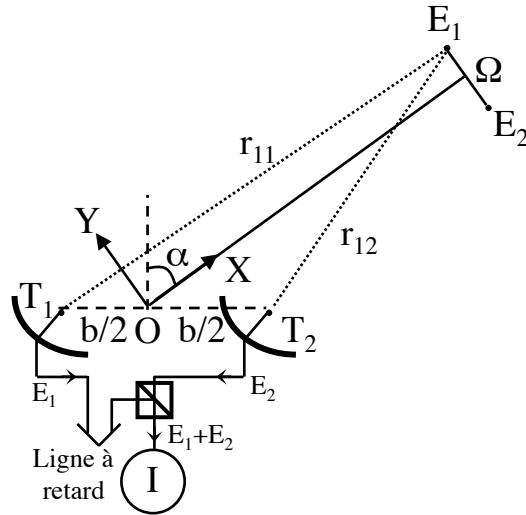
Image Astrophysique sur Mesure/B.Mollier

Un des moyens pour dépasser cet inconvénient est l'utilisation d'un télescope à synthèse d'ouverture, dans lequel deux télescopes sont positionnés à une certaine distance, appelée ligne de base.

Il peut sembler paradoxal que l'on obtienne une résolution qui s'affranchit des perturbations atmosphériques bien que les deux bras de l'interféromètre subissent eux-mêmes cette perturbation. Expliquez pourquoi.

- c) On considère un interféromètre à deux télescopes identiques  $T_1$  et  $T_2$  dont le diamètre des ouvertures circulaires est négligeable devant la longueur  $b$  de la ligne de base, c'est-à-dire de la ligne  $T_1T_2$  qui joint les deux instruments. Une étoile double de position moyenne  $W$  est repérée par l'angle  $\alpha$  (voir figure) et émet un rayonnement quasi monochromatique de longueur d'onde centrale  $\lambda$ . Les contributions à l'éclairement des deux composantes  $E_1$  et  $E_2$  de l'étoile double sont égales et valent chacune  $I_s$ .

On note  $d_s$  la distance  $OW$ ,  $x_1$  la distance  $WE_1$  et  $x_2 = -x_1$  la distance  $WE_2$ . Un dispositif permet de faire interférer les ondes optiques issues des deux foyers image en introduisant une différence de marche supplémentaire  $L_s$  donnée.



d) Exprimer, en fonction de  $l$ ,  $a$ ,  $L_s$ ,  $b$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , et  $d_s$ , les différences de phase  $\phi_1$  et  $\phi_2$  associées à  $E_1$  et  $E_2$ . On suggère d'exprimer les distances  $r_{11}$  et  $r_{12}$  dans le repère OXY. On utilisera le fait que  $d_s$  est très grand par rapport à toutes les autres distances du problème.

e) Montrer que l'éclairement total  $I$  s'écrit:

$$I = 2I_s \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right) \cos\left(2\pi \frac{l + L_s}{\lambda}\right) \right]$$

$a$  et  $l$  étant des longueurs que l'on déterminera en fonction de  $b$  et de  $a$ .

f) Trouver la plus petite distance angulaire que l'on peut détecter en obtenant un éclairement uniforme, c'est-à-dire constant en fonction de  $L_s$ . On donne  $b=6,10$  m,  $\alpha=60^\circ$  et  $\lambda=635$  nm. Pour quelle raison s'arrange-t-on généralement pour que  $L_s = -l$ ?

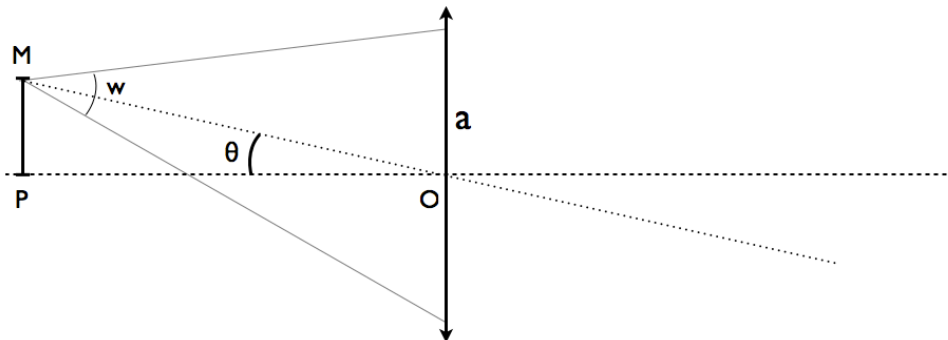
## Correction

### Ex 1 : Illumination de Köhler

1. L'illumination critique fait l'image de la source lumineuse (généralement un filament d'ampoule) dans le plan du spécimen (plan objet de l'objectif de microscope). Par conséquent les zones du spécimen étudié seront illuminées de manière différente selon qu'elles coïncident avec une zone intense ou une zone sombre de la source lumineuse. Cette méthode a l'avantage de collecter une grande quantité de lumière, mais au détriment de l'uniformité de l'illumination.

L'illumination Köhler fait l'image d'un diaphragme placé après la lentille condenseur, dans le plan du spécimen. L'illumination sur le condenseur est uniforme car toutes les parties de la source S contribuent pour chaque points dans le plan du condenseur. On va donc positionner une seconde lentille après le condenseur afin de faire l'image d'un diaphragme que l'on va placer juste après le condenseur. De cette façon, l'illumination de l'échantillon n'est pas affectée par l'inhomogénéité de la source. L'ajout du diaphragme et de la seconde lentille risque néanmoins de réduire la quantité de lumière disponible par rapport à l'illumination critique.

2. On suppose que la source émet une intensité constante dans toutes les directions de l'espace. Il suffit alors de montrer que l'angle solide sous lequel un point de la source voit la lentille de collection varie avec son éloignement de l'axe optique. Pour ceci on trace la figure suivante (ici en réduisant le problème à 2 dimensions de par la symétrie cylindrique du système autour de l'axe optique):

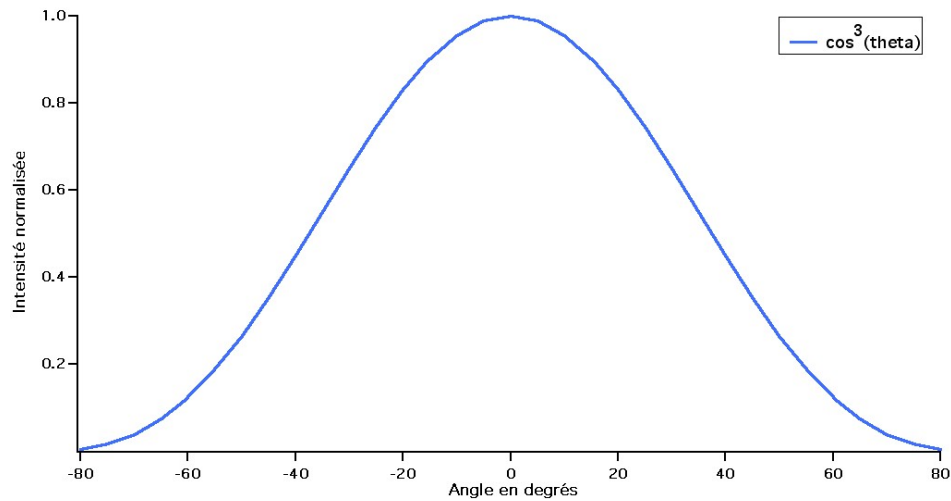


L'angle solide sous lequel la lentille est vue depuis le point M vaut  $w = \frac{a_p}{\| \overrightarrow{OM} \|^2}$  ou  $a_p$  est

la surface apparente  $a$  vue de M.

$$\text{Or, } a_p = a \frac{\| \overrightarrow{OP} \|}{\| \overrightarrow{OM} \|} = a \cos \theta \text{ et } \| \overrightarrow{OM} \| = \frac{\| \overrightarrow{OP} \|}{\cos \theta} = \frac{R}{\cos \theta}$$

On trouve alors que  $w = \frac{a}{R} \cos^3 \theta$ , loi bien connue des photographes, qui explique pourquoi une mauvaise combinaison de lentille/diaphragme/dimension de film donne une image claire près de l'axe optique et sombre sur les bords.



Pour maximiser l'uniformité d'un système d'illumination de Köhler il suffit alors de réduire l'ouverture du diaphragme. Cela permettra de ne sélectionner que la partie proche de l'axe optique qui est la partie la plus homogène. Mais la quantité de lumière transmise au plan du spécimen s'en trouve alors réduite. D'autre part, fermer le diaphragme revient à diminuer l'ouverture effective de collection (les rayons formant un grand angle avec l'axe optique et traversant la lentille sont rejetés). Or, comme il a été vu dans le cours, cela revient à augmenter la cohérence spatiale de la source du fait de la dépendance du degré complexe de cohérence spatiale en  $\frac{a}{\lambda R}$ . L'augmentation de la cohérence spatiale de l'illumination permet d'augmenter la résolution, mais ce fait au prix de de l'apparition de tavelures (speckles) qui dégradent fortement la lisibilité de l'image.

### Ex. 2 : Synthèse d'ouverture. Interféromètre à deux télescopes.

a)  $\theta \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$

b) Le paradoxe est dépassé par le fait qu'on n'obtient pas directement l'image de l'objet observé : pour chaque distance entre les bras on obtient l'une des composantes de Fourier. La reconstruction d'une image avec meilleure résolution est atteinte au prix d'un effort computationnel et d'une très forte perte de lumière détectée.

c) On a :

$$r_{11} = \left\| \overline{E_1 T_1} \right\| = \sqrt{\left(-\frac{b}{2} \sin \alpha - d_s\right)^2 + \left(\frac{b}{2} \cos \alpha - x_1\right)^2} = d_s \sqrt{1 + \frac{b}{d_s} \sin \alpha + \frac{b}{4d_s^2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{d_s^2} \left(\frac{b}{2} \cos \alpha - x_1\right)^2}$$

en développant jusqu'au deuxième ordre en  $\frac{1}{d_s}$ :

$$r_{11} \approx d_s + \frac{b}{2} \sin \alpha + \frac{b^2}{8d_s} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2d_s} \left(\frac{b}{2} \cos \alpha - x_1\right)^2 - \frac{b^2}{8d_s} \sin^2 \alpha$$

de même

$$r_{12} \approx d_s - \frac{b}{2} \sin \alpha + \frac{b^2}{8d_s} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2d_s} \left(-\frac{b}{2} \cos \alpha - x_1\right)^2 - \frac{b^2}{8d_s} \sin^2 \alpha$$

d'où

$$r_{12} - r_{11} \approx \frac{bx_1 \cos \alpha}{d_s} - b \sin \alpha$$

La différence de phase  $\phi_1$  entre les ondes issues de la source primaire  $E_1$ , reçues par les télescopes et parvenant au même point d'observation, s'écrit alors:

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{bx_1 \cos \alpha}{d_s} - b \sin \alpha + L_s \right)$$

De même la différence de phase  $\phi_2$  entre les ondes issues de la source primaire  $E_2$  s'écrit:

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{bx_2 \cos \alpha}{d_s} - b \sin \alpha + L_s \right)$$

- d) L'intensité totale est la somme des contributions des sources primaires  $E_1$  et  $E_2$  puisque ces sources sont incohérentes :

$$I = I_s(1 + \cos \phi_1) + I_s(1 + \cos \phi_2)$$

les contributions des deux sources primaires étant égales. Il vient, en transformant la somme de deux cosinus:

$$I = 2I_s \left( 1 + \cos \left( \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \cos \left( \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \right)$$

avec:

$$\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{b(x_1 - x_2) \cos \alpha}{d_s} = \frac{\pi}{\lambda} \times \theta \times b \cos \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} L_s - b \sin \alpha$$

On trouve donc:

$$I = 2I_s \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi a \theta}{\lambda} \right) \cos \left( 2\pi \frac{l + L_s}{\lambda} \right) \right] \text{ avec } a = b \cos \alpha \text{ et } l = -b \sin \alpha$$

- e) On obtient un éclairage uniforme pour:

$$a\theta = \frac{\lambda}{2} \text{ d'où } \theta = \frac{\lambda}{2b \cos \alpha} = \frac{\lambda}{b} = 10^{-7} \text{ rad}$$

En réalisant  $L_s = -l$ , on assure une excellente cohérence temporelle puisque les trains d'ondes qui interfèrent se chevauchent totalement.