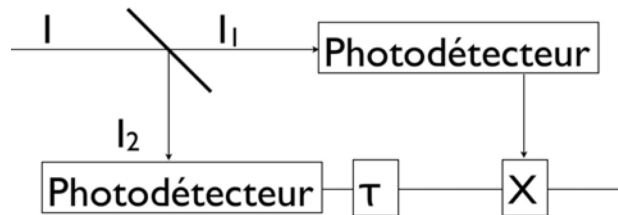


**Série 5**  
**21 Mars 2018**  
**Cohérence spatiale et corps noir**

Ex. 1 : Interféromètre de Hanbury-Brown et Twiss : Corrélation d'intensité



L'interféromètre de Hanbury-Brown et Twiss mesure les corrélations temporelles des fluctuations de l'intensité d'un signal mesurées à deux positions différentes  $r_1$  et  $r_2$ . On notera  $I_1$  et  $I_2$  les intensités mesurées en  $r_1$  et  $r_2$ , respectivement, ainsi que  $V_1$  et  $V_2$  les signaux analytiques complexes associés. On a  $I_j(t) = V_j^*(t)V_j(t)$  et  $V_j(t) = \frac{1}{2}(V_j^{(r)}(t) + iV_j^{(i)}(t))$  avec  $V_j^{(r)}(t)$  et  $V_j^{(i)}(t)$  les parties réelles et imaginaires du signal ( $j=1$  ou  $2$ ).

- a) Déterminer  $\langle I_1(t)I_2(t + \tau) \rangle$  en fonction des parties réelles et imaginaires des deux signaux mesurés.
- b) Déterminer le degré complexe de cohérence  $G_{12}(t)$  en fonction des parties réelles et imaginaires des deux signaux mesurés.

Indication : pour deux signaux analytiques on a

$$\langle V_1(t)V_2(t + \tau) \rangle = 0 ; \langle V_1^{(i)}(t)V_2^{(r)}(t) \rangle = 0 ;$$

$$\langle V_1^{(r)}(t)V_2^{(r)}(t + \tau) \rangle = \langle V_1^{(i)}(t)V_2^{(i)}(t + \tau) \rangle ; \langle V_1^{(i)}(t)V_2^{(r)}(t + \tau) \rangle = -\langle V_1^{(r)}(t)V_2^{(i)}(t + \tau) \rangle$$

- c) Montrer que  $\langle I_1(t)I_2(t + \tau) \rangle = \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle + |G_{12}(\tau)|^2$ . Commenter.

Indication : pour deux fonctions aléatoire de Gauss  $X(t)$  et  $Y(t)$  on peut utiliser la propriété  $\langle X^2Y^2 \rangle = \langle X^2 \rangle + \langle Y^2 \rangle + 2\langle XY \rangle^2$  et  $\langle XY \rangle = 0$  si  $X$  et  $Y$  sont indépendants.

- d) En déduire  $\langle \delta I_1(t)\delta I_2(t + \tau) \rangle$  avec les fluctuations instantanées de l'intensité. Commenter.

Indication : les effets de cohérence temporelle et de cohérence spatiale peuvent se factoriser, ceci est une propriété de la théorie de la cohérence appelée la propriété de réduction du degré de cohérence.

### Ex. 2 : Le cryostat

Un cryostat à hélium est constitué de deux enceintes, supposées sphériques. L'enceinte extérieure, de rayon  $R_2=6$  cm, est à la température ambiante  $T_{amb}$  ( $T_{amb}=20^\circ\text{C}$ ). L'enceinte intérieure, de rayon  $R_1=3$  cm, est en équilibre thermique avec l'hélium 4 liquide qu'elle contient, à la température de  $T_{He}=4,2$  K. Elle est ouverte sur l'extérieur par un petit tube. Le vide règne entre les deux enceintes. On assimilera les deux enceintes à des corps noirs.

- Quel type de transfert thermique a lieu?
- A quoi sert le petit tube. Calculer la masse d'hélium qui s'évapore de l'enceinte intérieure en une heure. (Chaleur latente d'évaporation de l'hélium  $L_{He}=82$  J/mol et masse molaire  $M_{He}=4$ g/mol)

### **Correction**

#### Ex. 1 : Interféromètre de Hanbury-Brown et Twiss : Corrélation d'intensité

- En développant on trouve

$$\begin{aligned} \langle I_1(t)I_2(t+\tau) \rangle &= \frac{1}{16} \left\{ \langle V_1^{(r)2}(t)V_2^{(r)2}(t+\tau) \rangle + \langle V_1^{(i)2}(t)V_2^{(r)2}(t+\tau) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle V_1^{(r)2}(t)V_2^{(i)2}(t+\tau) \rangle + \langle V_1^{(i)2}(t)V_2^{(i)2}(t+\tau) \rangle \right\} \end{aligned}$$

- De même en développant et en utilisant les relations données dans l'indication on trouve :

$$G_{12}(\tau) = \langle V_1^*(t)V_2(t+\tau) \rangle$$

$$G_{12}(\tau) = \frac{1}{2} \langle V_1^{(r)}(t)V_2^{(r)}(t+\tau) \rangle - \frac{1}{2}i \langle V_1^{(i)}(t)V_2^{(r)}(t+\tau) \rangle$$

- En utilisant l'indication on trouve :

$$\langle V_1^{(r)2}(t)V_2^{(r)2}(t+\tau) \rangle = \langle V_1^{(r)2}(t) \rangle \langle V_2^{(r)2}(t+\tau) \rangle + 2 \langle V_1^{(r)}(t)V_2^{(r)}(t+\tau) \rangle^2$$

en utilisant  $\langle V_j^{(r)2}(t) \rangle = \langle V_j^{(i)2}(t) \rangle = 2 \langle |V_j(t)|^2 \rangle = 2 \langle I_j \rangle$  on obtient :

$$\langle V_1^{(r)2}(t)V_2^{(r)2}(t+\tau) \rangle = 4 \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle + 2 \langle V_1^{(r)}(t)V_2^{(r)}(t+\tau) \rangle^2$$

$$\langle V_1^{(r)2}(t)V_2^{(r)2}(t+\tau) \rangle = 4 \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle + 8 (\text{Re}\{G_{12}(\tau)\})^2$$

de même

$$\langle V_1^{(i)2}(t)V_2^{(r)2}(t+\tau) \rangle = 4 \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle + 8 (\text{Im}\{G_{12}(\tau)\})^2$$

$$\langle V_1^{(r)^2}(t)V_2^{(i)^2}(t+\tau) \rangle = 4\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle + 8(\text{Im}\{G_{12}(\tau)\})^2$$

$$\langle V_1^{(i)^2}(t)V_2^{(r)^2}(t+\tau) \rangle = 4\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle + 8(\text{Re}\{G_{12}(\tau)\})^2$$

On en déduit :

$$\langle I_1(t)I_2(t+\tau) \rangle = \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle + |G_{12}(\tau)|^2$$

Cette expression peut se réécrire de la façon suivante :

$$\gamma_{12}^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I_1(t)I_2(t+\tau) \rangle}{\langle I_1(t) \rangle \langle I_2(t) \rangle} = 1 + |\gamma_{12}(\tau)|^2$$

avec  $\gamma_{12}^{(2)}(\tau)$  le degré de cohérence du second ordre. Pour  $\tau \gg \tau_c$  (temps de cohérence de la source), on obtient  $\gamma_{12}^{(2)} \rightarrow 1$  car  $\gamma_{12} \rightarrow 0$  et en outre il est évident que  $\gamma_{12}^{(2)}(0) = 2$ . Pour des sources classiques et y compris pour un laser idéal on a  $1 \leq \gamma_{12}^{(2)}(\tau) \leq 2$ . Par contre pour des états non classiques de la lumière on a  $0 \leq \gamma_{12}^{(2)}(\tau) \leq +\infty$ .

d) En utilisant  $\delta I_j(t) = I_j(t) - \langle I_j \rangle$ , on en déduit :

$$\langle I_1(t)I_2(t+\tau) \rangle = \langle [\langle I_1 \rangle + \delta I_1(t)][\langle I_2 \rangle + \delta I_2(t+\tau)] \rangle$$

$$\langle I_1(t)I_2(t+\tau) \rangle = \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle + \langle \delta I_1(t)\delta I_2(t+\tau) \rangle$$

par conséquent en utilisant la question précédente :

$$\langle \delta I_1(t)\delta I_2(t+\tau) \rangle = |G_{12}(\tau)|^2$$

ou encore

$$\langle \delta I_1(t)\delta I_2(t+\tau) \rangle = \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle |\gamma_{12}(\tau)|^2$$

Le degré complexe de cohérence mutuelle du premier ordre peut se réécrire :  $\gamma_{12}(\tau) = \gamma(\tau)\gamma_{12}(\tau=0, r=|r_1-r_2|)$  avec  $\gamma(\tau)$  le degré de cohérence temporel du premier ordre et  $\gamma_{12}(\tau=0, r=|r_1-r_2|)$  le degré de cohérence spatiale. En faisant varier  $r$ , i.e. la distance entre les deux détecteurs, on peut donc déterminer le diamètre angulaire d'un objet tel qu'une étoile (cf. interféromètre stellaire de Michelson).

Les fluctuations de l'intensité de la lumière incidente ont une bande de fréquence de l'ordre de  $1/\tau_c$ , à savoir 100MHz. Il est donc beaucoup plus facile de suivre ces fluctuations que d'essayer de suivre les variations instantanées de l'intensité qui oscille à  $10^{15}$ Hz.

### Ex. 2 : Le cryostat

- a) On a affaire à un transfert thermique de type radiatif du fait du vide entre les deux enceintes.
- b) Le rayonnement extérieur fournit de la chaleur à l'hélium qui par conséquent s'évapore par le tube. Sans ce tube la pression deviendrait énorme au cours du temps. Le bilan énergétique s'écrit :

$$\text{Chaleur fournie à l'hélium pendant } dt = \delta Q/dt = \sigma T_{\text{amb}}^4(4\pi R_2^2) - \sigma T_{\text{He}}^4(4\pi R_1^2)$$

La chaleur latente d'évaporation correspond à la quantité d'énergie nécessaire pour évaporer une mole d'hélium. La masse d'hélium évaporée pendant  $\tau=1\text{h}$  est donc :

$$m_{\text{He}} = (M_{\text{He}}/L)\delta Q = (4\pi\sigma M_{\text{He}}/L)(T_{\text{amb}}^4 R_2^2 - T_{\text{He}}^4 R_1^2)\tau$$

$$\delta Q = 4\pi \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot ((293)^4 (6 \cdot 10^{-2})^2 - (4.2)^4 (3 \cdot 10^{-2})^2) \approx 18.9 \text{ W}$$

$$m_{\text{He}} = 18.9 \cdot (4/82) \cdot 3600 \approx 3.3 \text{ kg}$$

- c) La chaleur fournie à l'hélium pendant  $dt$  devient :  $\delta Q/dt = \sigma T_{\text{N}_2}^4(4\pi R^2) - \sigma T_{\text{He}}^4(4\pi R_1^2)$

En prenant  $R \approx R_1$  qui est l'optimum pour évaporer le moins d'hélium, on obtient :  $\delta Q/dt \approx \sigma(T_{\text{N}_2}^4 - T_{\text{He}}^4)(4\pi R_1^2) \approx 0.022 \text{ W}$

D'où pendant 1h :  $m_{\text{He}} = 4 \text{ g}$

La chaleur reçue par l'azote liquide est  $\delta Q/dt \approx 18.88 \text{ W}$ . La chaleur latente de vaporisation de l'azote est  $198.4 \text{ J/g}$ , i.e. environ 10 fois plus grande que celle de l'hélium ( $82/4 = 20.5 \text{ J/g}$ ). La masse évaporée est donc 10 fois plus petite. Par ailleurs le prix de l'azote liquide (environ 5 centimes d'euro par litre) est environ 50 fois moins cher que celui de l'hélium liquide. On comprend ainsi l'intérêt d'utiliser le réservoir d'azote intermédiaire.