ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Série 7

11 Avril 2017

Corps noir

Ex 1: Thermodynamique du rayonnement du corps noir

On considère un rayonnement électromagnétique dans une enceinte de volume L^3 dont la paroi est à une température T.

a) A partir de la loi de Planck, montrer que l'énergie interne volumique totale s'écrit $u = (4/c)\times\sigma T^4$.

b) Tout rayonnement exerce sur une surface une force et donc une pression de radiation. En faisant l'hypothèse que l'énergie et la quantité de mouvement d'un photon sont respectivement $h\nu$ et $h\nu/c$ et que les photons sont réfléchis sur la paroi de l'enceinte, montrer que la pression de radiation *p* exercée par un rayonnement isotrope est donnée par $P=u/3$

c) En déduire l'équation d'état du gaz de photon qui relie la pression à la température.

Ex 2: Rayonnement dans une sphère en expansion

On va maintenant supposer que l'enceinte est une sphère dont le rayon R augmente au cours du temps

a) L'expansion de la sphère est isentropique (i.e. adiabatique et réversible). En utilisant le bilan énergétique du premier principe de la thermodynamique et la relation $P = u/3$ (question b)), montrer que la température T de l'enceinte varie comme $1/R$

b) Selon le modèle standard, 700'000 ans après le Big-Bang, la température du rayonnement cosmique valait Te=3000K. Aujourd'hui, la température du rayonnement cosmique ne vaut plus que 2.72K. En déduire le rapport de l'expansion de l'univers.

c) On multiplie le rayon de la sphère par un facteur α. Montrer que la loi de Planck est invariante.

d) On sait que selon le modèle standard l'univers est en expansion. Qu'en déduit-on sur le décalage spectral du rayonnement cosmologique dans l'univers ?

Correction

Ex 1: Thermodynamique du rayonnement du corps noir.

a) La loi de Planck donne la densité d'énergie par unité de fréquence et par unité de volume.
Pour retrouver l'énergie interne volumique totale, il nous faut donc intégrer la loi de Planck sur l'ensemble des radiations émises par l'enceinte:
$$u = \frac{U}{L^3} = \int_0^\infty \rho_{em}(\nu)d\nu = \int_0^\infty \rho_{em}(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}d\lambda$$
De la même façon dont la Loi de Stefan-Boltzmann à été démontrée dans le cours, on peut résoudre cette intégrale pour trouver le résultat suivant: $u = \frac{8\pi^5(k_B T)^4}{15(hc)^3}$
Ce résultat peut être simplifié en utilisant la définition du coefficient de Stefan $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3}$.
On obtient alors la relation recherché : $u = \frac{4}{c}\sigma T^4$

b) On considère une surface A de l'enceinte qui est percutée par les photons contenus dans l'enceinte. En ne prenant en compte que les photons se déplaçant selon un axe (par exemple dans l'axe normal à la surface A que l'on fait coïncider avec l'axe x), la pression est égale au changement de la quantité de mouvement par unité d'aire: $P = \dfrac{1}{A}\dfrac{dp}{dt}$.
Les photons qui vont heurter la paroi se trouvent dans le volume $A \cdot v_x$. Comme les photons ne vont pas être absorbés par la paroi mais être réémis, la pression P peut donc s'écrire: $P = \dfrac{1}{A}2np_x \cdot Av_x = 2np_x v_x$
Avec n la densité volumique de photons N/V où N est le nombre de photons dans l'enceinte et V le volume de l'enceinte. Il faut toutefois ne pas oublier de prendre en compte le fait que les photons n'ont pas tous la même vitesse selon x (trajectoire inclinée) et que la moitié d'entre eux ne se dirigent pas vers la paroi. Il faut donc faire la moyenne et diviser par deux l'équation précédente.
L'équation de la pression s'écrit donc: $P = n\langle p_x v_x\rangle = \dfrac{N}{V}\langle p_x v_x\rangle$
En rajoutant les 2 autres dimensions, comme les photons ont des distributions de vitesse isotrope : $\langle p_x v_x\rangle = \langle p_y v_y\rangle = \langle p_z v_z\rangle$
Alors, on peut écrire: $\langle p_x v_x\rangle = \dfrac{1}{3}\langle p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z\rangle = \dfrac{1}{3}\langle \vec{p}\cdot\vec{v}\rangle$.
$\langle \vec{p}\cdot\vec{v}\rangle$ correspond à l'énergie E d'un photon. L'énergie totale U des N photons est donc $U = N\langle \vec{p}\cdot\vec{v}\rangle$
Finalement, la pression se note: $P = \frac{1}{3}\frac{N}{V}\langle \vec{p}\cdot\vec{v}\rangle = \frac{U}{3V} = \frac{u}{3}$

c) On combine simplement les réponses des questions a) et b) pour trouver: $P = \frac{4}{3c}\sigma T^4$.
Contrairement à l'équation d'état des gaz parfaits PV=nRT, l'équation d'état pour un gaz de photon ne fait pas intervenir le volume. Donc contrairement aux fluides, p et T ne sont pas indépendants.

Ex. 2 : Rayonnement dans une sphère en expansion

a) Le bilan énergétique du premier principe de la thermodynamique donne :
$dU=dW_t=-pdV$ soit $d(4\pi R^3W/3)=-W/3d(4\pi R^3/3)$ avec dW_t le travail élémentaire
comme $d(R^3W)=R^3dW+3WR^2dR$ on en déduit :
$dW/W=-4dR/R$
ce qui donne en intégrant :$\ln W=\ln(1/R^4)+cte$ et donc $W=Cte/R^4$
par ailleurs $W=(4/c)\times sT^4$ donc $T=Cte/R$
Ainsi, la température T associée au rayonnement diminue au fur et à mesure que le rayon R augmente.

b) Soit R_e le rayon de la sphère lorsque $T=T_e$. Le rapport d'expansion de l'univers R/R_e est donné par : $R/R_e=T_e/T\approx1100$

c) Le nombre n_λ de photons par unité de volume est multiplié par $1/\alpha^3$.

La température est multipliée par $1/\alpha$ (démontré aux points a) puisqu'elle est inversement proportionnelle à R et l'énergie volumique totale W est multipliée par $1/\alpha^4$ d'après la loi de Stefan. Il en résulte que l'énergie de chaque photon W/n_λ est multipliée par $1/\alpha$ et donc la longueur d'onde par α:

$T'=T/\alpha$;$W'=W/\alpha^4$; $\lambda'=\alpha\lambda$

En divisant l'expression de $W_\lambda d\lambda$ par α^4, il vient :

$$\frac{W_\lambda d\lambda}{\alpha^4}=W'_{\lambda'}d\lambda'=\frac{8\pi hc}{\lambda^5\alpha^5}\frac{\alpha d\lambda}{\exp\left[\alpha hc/(\alpha\lambda k_B T)\right]-1}$$

d'où :

$$W'_{\lambda'}d\lambda'=\frac{8\pi hc}{\lambda'^5}\frac{d\lambda'}{\exp\left[hc/(\lambda' k_B T')\right]-1}$$

La formule de Planck est invariante par changement d'échelle.

d) L'expansion isentropique produit un décalage spectral de son rayonnement vers le rouge :

$\lambda'_{max}/\lambda_{max} = R'/R = T/T' = \alpha>1$

Remarque: Appliqué à l'univers en expansion ce calcul non relativiste décrit le refroidissement (et donc le décalage du maximum du spectre vers les grandes longueurs d'ondes) du rayonnement cosmique, c'est à dire un refroidissement du rayonnement du corps noir. Il ne faut pas confondre ce décalage vers le rouge avec un autre décalage vers le rouge également causé par l'expansion de l'univers, celui des spectres d'émission provenant d'étoiles éloignées qui s'éloignent les unes des autres. Dans ce dernier cas le décalage spectral est dû à l'effet Doppler.