Série 8

18 Avril 2017

Introduction à l'optique quantique

Ex. 1 : Quantification du champ électromagnétique

a) En utilisant le cheminement indiqué dans le cours, monter que l'énergie électromagnétique du mode k s'exprime sous la forme :

$$U_k = \iiint_V \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) d^3 r = \frac{\varepsilon_0}{2V}\left(\left|\frac{\partial A_k}{\partial t}\right|^2 + \omega_k^2 A_k^2\right) = \frac{\varepsilon_0}{2V}(E_k^2 + \omega_k^2 A_k^2)$$

Indication : utiliser l'égalité de Plancherel-Parseval

$$\iiint_V F(\vec{r},t)^* \, G(\vec{r},t) d^3\vec{r} = \frac{1}{L^3}\sum_k \mathcal{F}_k^*(t) G_k(t)$$

b) En introduisant les opérateurs création et annihilation

$$a_k^\dagger = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\,\hbar\,\omega_k V}}\left[\omega_k A_k + i\frac{\partial A_k}{\partial t}\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\,\hbar\,\omega_k V}}[\omega_k A_k + iE_k]$$

$$a_k = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\,\hbar\,\omega_k V}}\left[\omega_k A_k - i\frac{\partial A_k}{\partial t}\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\,\hbar\,\omega_k V}}[\omega_k A_k - iE_k]$$

monter que les opérateurs de champ électromagnétique s'écrivent :

$$E_k = i\sqrt{\frac{\hbar\,\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\left(a_k e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} - a_k^\dagger e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right)\vec{e}_k$$

$$H_k = i\sqrt{\frac{\hbar\,c^2}{2\mu_0 V\omega_k}}\vec{k}\wedge\vec{e}_k\left(a_k e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} - a_k^\dagger e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right)$$

Ex 2: Quantification d'un circuit LC excité par une source de tension

a) On considère un circuit LC sans pertes. Soit $e(t)$ la tension excitatrice et q la charge du circuit. Ecrire l'équation classique qui détermine la charge q. On posera $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$ la fréquence de résonance du circuit.

b) En faisant l'analogie avec l'oscillateur harmonique, quelle est la variable conjuguée de q? On la notera p.

c) Soit H le Hamiltonien de ce système. Les équations classiques du mouvement de ce système sont (équations de Hamilton-Jacobi)):

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$
$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Déterminer H.

d) Nous associons des opérateurs hermitiens à q et p. Quelle est la relation qui traduit la quantification?

e) On introduit les opérateurs non-hermitien a et a^{+} définit en fonction de q et p, avec:

$$a = (2\pi\omega_0 L)^{-\frac{1}{2}}(\omega_0 Lq + ip)$$

$$a^{+} = (2\pi\omega_0 L)^{-\frac{1}{2}}(\omega_0 Lq - ip)$$

Ecrire q et p en fonction de a et a^{+}. En utilisant la question précédente montrer que $[a,a^{+}] = 1$.

f) Ecrire H en fonction de a et a^{+}. On posera $f(t) = -\frac{e(t)}{\sqrt{2\hbar\omega_0 L}} = f^{*}(t)$

g) On charge la capacité avec une tension de 1 volt. A t=0 on court-circuite la source. Calculer l'énergie totale du système en prenant C=1nF. Déterminer la condition à réaliser pour se trouver dans un régime quantique. Que vaut L dans ce cas? Commenter.

Correction

Ex. 1 : Quantification du champ électromagnétique

a) En introduisant les potentiels vecteur et scalaire, $\vec{A}$ et V respectivement, les équations de Maxwell s'écrivent

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \quad\rightarrow\quad \vec{B}=\nabla\wedge\vec{A}$$
$$\nabla\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad\rightarrow\quad \vec{E}=-\nabla V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$
$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\wedge\vec{B}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{J} \quad\rightarrow\quad \nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla V+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\mu_0\vec{J}$$
$$\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}=\sigma \quad\rightarrow\quad -\varepsilon_0\nabla^2 V-\varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\sigma$$

Dans le jauge de Coulomb ($\nabla\cdot\vec{A}=0$) et en absence de courants et de charges on obtient

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Grâce à l'égalité de Plancherel-Parseval on a tout de suite

$$U_k=\iiint_V\left(\frac{\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)d^3r=\frac{\varepsilon_0}{2V}\left(\left|\frac{\partial A_k}{\partial t}\right|^2+c^2A_k^2\right)$$

Et en utilisant la relation de dispersion $\omega_k=c|\vec{k}|$

$$U_k=\iiint_V\left(\frac{\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)d^3r=\frac{\varepsilon_0}{2V}\left(\left|\frac{\partial A_k}{\partial t}\right|^2+\omega_k^2A_k^2\right)=\frac{\varepsilon_0}{2V}(E_k^2+\omega_k^2A_k^2)$$

b) En considérant les analogies

$\omega\leftrightarrow\omega_k$

$m\leftrightarrow\frac{\varepsilon_0}{V}$

$x\leftrightarrow A_k$

$p\leftrightarrow-\frac{\varepsilon_0}{V}E_k$

On reconnaît l'analogie avec les opérateurs de création et de annihilation pour un oscillateur harmonique :

$$a^\dagger=\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\,\omega}}[m\omega x-ip]\ \leftrightarrow\ a_k^\dagger=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\,\hbar\,\omega_kV}}[\omega_kA_k+iE_k]$$
$$a=\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\,\omega}}[m\omega x+ip]\leftrightarrow a_k=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\,\hbar\,\omega_kV}}[\omega_kA_k-iE_k]$$

Et donc l'Hamiltonien $\mathcal{H}_k=\frac{1}{2}\hbar\,\omega_k(a_ka_k^\dagger+a_k^\dagger a_k)$

Par analogie avec l'expression de l'énergie électromagnétique du mode (exprimée en fonction du potentiel vecteur $\vec{A}_k$, cf par exemple Loudon, *« The quantum theory of light »*, chap. 4)

$$U_k=\varepsilon_0V\omega_k^2(A_kA_k^*+A_k^*A_k)$$

On trouve $A_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V\omega_k}}\left(a_k e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} - a_k^\dagger e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right)\vec{e}_k$

Et alors

$$E_k = i\sqrt{\frac{\hbar\,\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\left(a_k e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} - a_k^\dagger e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right)\vec{e}_k$$

$$H_k = i\sqrt{\frac{\hbar\,c^2}{2\mu_0 V\omega_k}}\vec{k}\wedge\vec{e}_k\left(a_k e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} - a_k^\dagger e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right)$$

Ex 2: Quantification d'un circuit LC excité par une source de tension

a) La tension au bornes de la bobine vaut $V_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$ avec i le courant et la tension aux bornes de la capacité vaut $V_C = \frac{1}{C}q$.

Comme $V_L + V_C = e(t)$, on en déduit:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = \frac{1}{L}e(t)$$

b) On a $i = \frac{dq}{dt}$. En faisant l'analogie avec l'oscillateur harmonique on voit que L joue le rôle de la masse. Il est donc naturel de choisir $p = Li$ comme variable conjuguée de q. On a alors $L\frac{dq}{dt} = p(t)$.

c) Avec la question précédente on a déjà $L\frac{dq}{dt} = p(t)$. Par ailleurs, en utilisant la question a) on peut écrire: $\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{C}q + e(t)$.

A partir de $\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{L}p(t)$ on intègre une première fois par rapport à q, ce qui donne $H(t) = \frac{1}{2L}p^2 + g(q)$. On détermine la fonction $g(q)$ à partir de $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{1}{C}q + e(t)$

d'où: $H(t) = \frac{1}{2L}p^2 + \frac{1}{2C}q^2 - e(t)q$.

d) La relation qui traduit la quantification est $[q,p] = i\hbar$

e) Il est immédiat que:

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0 L}{2}}\,[a^+ - a]$$

Et

$$q = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0 C}{2}}\ [a^+ + a]$$

En utilisant $[q,p] = i\hbar$ on trouve tout aussi immédiatement que $[a,a^+] = 1$.

f) En injectant les expressions de q et p en fonction de a et a^+ dans H obtenu à la question c) on trouve: $H(t) = \hbar\omega_0\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) + \hbar[f(t)a + f^*(t)a^+]$

g) L'énergie totale est $E_{total} = \frac{1}{2}C \times 1^2 = \frac{1}{2}10^{-9}\,Joules$

La quantification a lieu quand le quanta d'énergie $\hbar\omega_0$ est de l'ordre de grandeur de l'énergie totale du système, i.e. $\hbar\omega_0 = \hbar\frac{1}{\sqrt{LC}} \approx E_{total}$

ce qui est équivalent à $L \approx \frac{\hbar}{E_{total}^2 C} \approx 4.10^{-41}\ H$

Pour une bobine infinie (solénoïde) on a $L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 \frac{N}{l} I \times NS}{I} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$

avec, ϕ le flux et N le nombre de spires, l la longueur de la bobine, S la surface d'une spire et $N = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Pour la valeur de L trouvée précédement on obtient $\frac{S}{l} = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{N^2} \times 10^{-34}$.

En prenant $S = \pi \times r^2$ on trouve un facteur de forme $\frac{r}{l} = \left(\frac{1}{\pi} \times \frac{1}{N} \times 10^{-17}\right)$ qui est irréaliste, ce qui montre qu'avec une capacité de 1nF on ne peut pas atteindre le régime quantique. Il en est de même pour une capacité C de 1pF qui donne:

$$\frac{r}{l} = \left(\frac{\sqrt{10}}{\pi} \times \frac{1}{N} \times 10^{-12}\right).$$

Remarque: si on considère un condensateur plan de surface S' et d'épaisseur d, on a $\frac{S'}{d} = \frac{1}{\varepsilon_0} C \approx 10^2$ pour C=1nF et $\frac{S'}{d} = \frac{1}{\varepsilon_0} C \approx 10^{-1}$ pour C=1pf (les valeur de capacité que l'on trouve en générale vont de 1pF à 1μF).

La forme trouvée pour H est identique à celle du Hamiltonien de l'oscillateur harmonique forcée. L'opérateur nombre a^+a pour les quanta de l'oscillateur devient l'opérateur nombre de photons dans le circuit LC. a et a^+ sont respectivement les opérateurs annihilation et création de photon du circuit.