OPTIQUE II

Section de Physique
Professeur : R. Houdré
Exercices : K. Roux

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

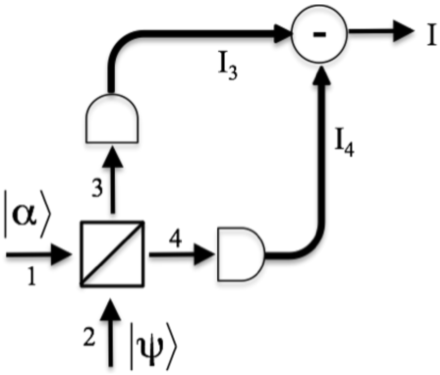
Série 8

25 Avril 2017

Introduction à l'optique quantique

Ex 1 : Détection homodyne

On considère un montage de détection homodyne. Ce montage est constitué d'une lame séparatrice de faisceaux. Les deux ports d'entrée sont notés 1 et 2 et les deux ports de sortie 3 et 4. Dans chaque port de sortie se trouve un détecteur dont l'efficacité quantique est de 100%. Dans le port d'entrée 1, on injecte un champs cohérent connu $|\alpha\rangle$, aussi appelé oscillateur local. On y associe l'opérateur annihilation $\hat{a}_1$. Dans le port 2 est injecté un état du champ monomode $|\psi\rangle$ inconnu auquel on associe l'opérateur annihilation $\hat{a}_2$.
On souhaite analyser les quadratures du champ $|\psi\rangle$. Le signal mesuré est $I=I_3-I_4$ avec I_3 l'intensité détectée dans le port 3 et I_4 celle mesurée dans le port 4.



a) Ecrire la matrice de transfert à travers la lame pour des champs classiques (on notera r et t les coefficients de réflexion et transmission en amplitude). On peut montrer que la même matrice de transfert s'applique aux opérateurs d'annihilation associé à chaque port de la lame. En déduire la relation entre $\hat{a}_3$, $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$ et la relation entre $\hat{a}_4$, $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$.
b) Ecrire l'opérateur $\hat{M}$ associé à la différence des courants en fonction des opérateurs annihilation et création dans les ports de sortie 3 et 4.
c) En utilisant la questions a) réécrire $\hat{M}$ en fonction des opérateurs annihilation et création dans les ports d'entrée 1 et 2. On supposera $t = r = 1/\sqrt{2}$.
d) En utilisant la relation : $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, avec $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$, déterminer $\langle M \rangle$ la valeur moyenne de $\hat{M}$. Montrer qu'avec un choix judicieux de θ on peut faire apparaître les quadratures du champ $\hat{E}_q$ et $\hat{E}_p$ associées à $|\psi\rangle$. Conclure.
e) Déterminer $(\Delta M)^2$ la variance $\hat{M}$. En supposant $|\alpha| >> |\langle\psi|\hat{E}|\psi\rangle|$, montrer que la mesure du bruit sur I permet de mesurer les variance des quadratures de $|\psi\rangle$

Ex 2 : Etude d'un d'état de la lumière : les états nombres

On considère un état nombre $|n\rangle$.

a. Montrer que $\langle n|\hat{n}|n\rangle^2 = \langle n|\hat{n}^2|n\rangle$. En déduire l'incertitude sur le nombre de photon Δn. (rappel : $\Delta X = \sqrt{\langle\phi|\hat{X}^2|\phi\rangle - \langle\phi|\hat{X}|\phi\rangle^2}$)
b. On introduit l'opérateur de phase $\hat{\phi}$ pour lequel on donne les définitions suivantes :
$$\begin{cases} e^{i\hat{\phi}} & = & (\hat{n}+1)^{-1/2}\,\hat{a} \\ e^{-i\hat{\phi}} & = & \hat{a}^\dagger(\hat{n}+1)^{-1/2} \end{cases}$$
$e^{\pm i\hat{\phi}}$ est-il Hermitien ? Qu'en concluez-vous ?
Calculer les états $e^{i\hat{\phi}}|n\rangle$ et $e^{-i\hat{\phi}}|n\rangle$.
Trouver tous les éléments de matrice non-nuls pour les opérateurs $e^{i\hat{\phi}}$ et $e^{-i\hat{\phi}}$.
c. Calculer les états $\cos(\hat{\phi})|n\rangle$ et $\sin(\hat{\phi})|n\rangle$. Trouver tous les éléments de matrice non-nuls pour les opérateurs $\cos(\hat{\phi})$ et $\sin(\hat{\phi})$.
d. Calculer $\langle n|\cos^2(\hat{\phi})|n\rangle$ et $\langle n|\sin^2(\hat{\phi})|n\rangle$ et comparer ces éléments de matrice à ceux de $\langle n|\cos(\hat{\phi})|n\rangle^2$ et $\langle n|\sin(\hat{\phi})|n\rangle^2$ respectivement. Quelle conclusion en tirer vous ?
e. Calculer $\langle n|\cos^2(\hat{\phi})|n\rangle + \langle n|\sin^2(\hat{\phi})|n\rangle$.

Correction

Ex 1 : Détection homodyne

a) Afin de démonter la relation, nous allons utiliser des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude qui dépendent des faisceaux considérés :

$$\begin{cases} E_3 = R_{31}E_1 + T_{32}E_2 \\ E_4 = T_{41}E_1 + R_{42}E_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{31} & T_{32} \\ T_{41} & R_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, R_{31} est le coefficient de réflexion du faisceau 1 vers le faisceau 3.
La relation de conservation de l'énergie s'écrit à partir de la conservation de l'intensité : $|E_1|^2 + |E_2|^2 = |E_3|^2 + |E_4|^2$
En développant, on trouve la relation suivante :

$$|E_1|^2 + |E_2|^2 = \left(|R_{31}|^2 + |T_{41}|^2\right)E_1^2 + \left(|R_{42}|^2 + |T_{32}|^2\right)E_2^2 + 2\left(R_{31}T_{32}^* + R_{42}^*T_{41}\right)E_1E_2$$

Par identification, on en déduit que $\begin{cases} |R_{31}|^2 + |T_{41}|^2 = |R_{41}|^2 + |T_{32}|^2 = 1 \\ R_{31}T_{32}^* + R_{42}^*T_{41} = 0 \end{cases}$

En écrivant les coefficients de réflexion et de transmission avec les termes d'amplitude et de phase : $R = |R|e^{i\phi}$, on obtient la relation entre les amplitudes :

$$\frac{|R_{31}|}{|T_{41}|} = \frac{|R_{42}|}{|T_{32}|}$$

La relation entre les phases donne : $\phi_{31} + \phi_{42} - \phi_{32} - \phi_{41} = \pm\pi$
On veut que les coefficients soient réels. On va alors fixer $\phi_{31} = \phi_{32} = \phi_{42} = 0$ et $\phi_{41} = \pi$ (choisi de façon arbitraire)
En posant que $R_{31} = R_{42} = r$ et $T_{41} = T_{32} = t$, on retrouve la matrice de transfert recherché : $\begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ -t & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$

b) On suppose que l'efficacité quantique des détecteurs est de 100%. L'opérateur associé à la mesure de l'intensité par les détecteurs est donc l'opérateur associé au nombre de photons $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$.
Ainsi : $\hat{M} = \hat{I}_3 - \hat{I}_4 = \hat{n}_3 - \hat{n}_4 = \hat{a}_3^+\hat{a}_3 - \hat{a}_4^+\hat{a}_4$

c) $\hat{M} = \hat{a}_3^+\hat{a}_3 - \hat{a}_4^+\hat{a}_4 = \left(r^*\hat{a}_1^+ + t^*\hat{a}_2^+\right)\left(r\hat{a}_1 + t\hat{a}_2\right) - \left(-t^*\hat{a}_1^+ + r^*\hat{a}_2^+\right)\left(-t\hat{a}_1 + r\hat{a}_2\right)$
En prenant $t = r = 1/\sqrt{2}$ cette expression ce simplifie en :

$$\hat{M} = \hat{a}_1^+\hat{a}_1(r^*r - t^*t) + \hat{a}_2^+\hat{a}_2(t^*t - r^*r) + \hat{a}_1^+\hat{a}_2(r^*t + t^*r) + \hat{a}_2^+\hat{a}_1(tr + t^*r)$$

Les deux premiers termes s'annulent car $r = t = \frac{1}{\sqrt{2}}$
Au final, $\hat{M} = \hat{a}_1^+\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\hat{a}_1$

d) Le système est dans l'état $|\psi\rangle|\alpha\rangle$

$$\langle\hat{M}\rangle = \langle\alpha|\langle\psi|\hat{a}_1^+\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\hat{a}_1|\psi\rangle|\alpha\rangle = \langle\psi|\alpha^*\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\alpha|\psi\rangle = |\alpha|\langle\psi|e^{-i\theta}\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+e^{i\theta}|\psi\rangle$$

car $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

Si l'on choisit θ=0, on obtient $\langle\hat{M}\rangle = \frac{|\alpha|}{\xi_0}\langle\hat{E}_q\rangle$ et pour θ=π/2, $\langle\hat{M}\rangle = \frac{|\alpha|}{\xi_0}\langle\hat{E}_p\rangle$

où $\hat{E}_q = \xi_0(\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+)$ et $\hat{E}_p = -i\xi_0(\hat{a}_2 - \hat{a}_2^+)$ sont les quadratures associées au champ qui agit sur l'état $|\psi\rangle$

En changeant la phase on peut donc mesurer les quadratures moyennes du champ associé à l'état $|\psi\rangle$

e) $(\Delta M)^2 = \langle M^2\rangle = \langle\alpha|\langle\psi|(\hat{a}_1^+\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\hat{a}_1)^2|\psi\rangle|\alpha\rangle$

$$\langle M^2\rangle = \langle\psi|\alpha^{*2}\hat{a}_2^2 + 2|\alpha|^2\hat{a}_2^+\hat{a}_2 + |\alpha|^2 + \alpha^2\hat{a}_2^{+2} + \hat{a}_2^+\hat{a}_2|\psi\rangle$$

$$\langle M^2\rangle = \langle\psi|\alpha^{*2}\hat{a}_2^2 + 2|\alpha|^2\hat{a}_2^+\hat{a}_2 + |\alpha|^2 + \alpha^2\hat{a}_2^{+2}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{a}_2^+\hat{a}_2|\psi\rangle$$

$$\langle M^2\rangle = |\alpha|^2\langle\psi|e^{-i2\theta}\hat{a}_2^2 + 2\hat{a}_2^+\hat{a}_2 + 1 + e^{i2\theta}\hat{a}_2^{+2}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{a}_2^+\hat{a}_2|\psi\rangle$$

Avec l'hypothèse $|\alpha|^2 >> \langle\psi|\hat{a}_2^+\hat{a}_2|\psi\rangle$

$$\langle M^2\rangle \approx |\alpha|^2\langle\psi|e^{-i2\theta}\hat{a}_2^2 + 2\hat{a}_2^+\hat{a}_2 + 1 + e^{i2\theta}\hat{a}_2^{+2}|\psi\rangle$$

Donc si on choisit θ=0, on obtient $\Delta M^2 = \frac{|\alpha|^2}{\xi_0^2}\Delta E_q^2$

Et pour θ=π/2, $\Delta M^2 = \frac{|\alpha|^2}{\xi_0^2}\Delta E_p^2$

avec $\langle E_q^2\rangle = \xi_0^2\langle\psi|\hat{a}^2 + 2\hat{a}^+\hat{a} + 1 + \hat{a}^{+2}|\psi\rangle$ et $\langle E_q^2\rangle = \xi_0^2\langle\psi| - \hat{a}^2 + 2\hat{a}^+\hat{a} + 1 - \hat{a}^{+2}|\psi\rangle$

En changeant la phase et en mesurant le bruit sur la différence des courants, on obtient la variance des quadratures du champ associé à l'état $|\psi\rangle$

On pourra remarquer que le bruit de l'oscillateur local n'intervient pas, ce qui est une propriété intéressante.

Ex 2 : Etude d'un d'état de la lumière : les états nombres

a) Comme $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$, on trouve que $\langle n|\hat{n}|n\rangle = n$ et que $\langle n|\hat{n}^2|n\rangle = n^2$, on a donc $\langle n|\hat{n}|n\rangle^2 = \langle n|\hat{n}^2|n\rangle$. L'incertitude d'une observable correspondant à l'opérateur $\hat{X}$ est $\Delta X = \sqrt{\langle\phi|\hat{X}^2|\phi\rangle - \langle\phi|\hat{X}|\phi\rangle^2}$. Dans ce cas précis, l'incertitude sur le nombre de photon est nulle, c'est la raison pour laquelle ces états sont appelés "états nombres".

b) Les définitions nous donnent:

$$e^{i\hat{\phi}} = (\hat{n}+1)^{-1/2}\hat{a} \qquad \text{et} \qquad e^{-i\hat{\phi}} = \hat{a}^+(\hat{n}+1)^{-1/2}$$

On peut vérifier si $e^{i\widehat{\Phi}}$ est Hermitien en calculant directement $\left(e^{i\widehat{\Phi}}\right)^\dagger$:

$\left(e^{i\widehat{\Phi}}\right)^\dagger = \left((\hat{n}+1)^{-1/2}\hat{a}\right)^\dagger = (\hat{a})^\dagger\left((\hat{n}+1)^{-1/2}\right)^\dagger = \hat{a}^\dagger\left(\hat{n}^\dagger + 1\right)^{-1/2} = \hat{a}^\dagger\left(\hat{n} + 1\right)^{-1/2} = e^{-i\widehat{\Phi}}$

Comme $\left(e^{i\hat{\phi}}\right)^{\dagger} \neq \left(e^{i\hat{\phi}}\right)$ l'opérateur n'est pas Hermitien. $e^{i\hat{\phi}}$ et $e^{-i\hat{\phi}}$ ne correspondent donc pas à des observables physiques.
En utilisant

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$$
$$\hat{a}|n\rangle = n^{1/2}|n\rangle$$
$$\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = (n+1)^{1/2}|n\rangle$$

On a

$$e^{i\phi}\big|n\rangle = (\hat{n}+1)^{-1/2}\hat{a}\big|n\rangle = (\hat{n}+1)^{-1/2}n^{1/2}\big|n-1\rangle = \left[(n-1)+1\ \right]^{-1/2}n^{1/2}\big|n-1\rangle$$
$$= |n-1\rangle$$
$$e^{-i\phi}\big|n\rangle = \hat{a}^{\dagger}(\hat{n}+1)^{-1/2}\big|n\rangle = \hat{a}^{\dagger}(n+1)^{-1/2}\big|n\rangle = (n+1)^{1/2}(n+1)^{-1/2}\big|n+1\rangle$$
$$= |n+1\rangle$$

Les seuls éléments de matrice non nuls sont :

$$\langle n-1|e^{i\hat{\phi}}|n\rangle = 1, \forall n \in N^{*}$$
$$\langle n+1|e^{-i\hat{\phi}}|n\rangle = 1, \forall n \in N$$

En utilisant les définitions on a:

$$\cos(\hat{\phi}) = \frac{1}{2}\left(e^{i\hat{\phi}} + e^{-i\hat{\phi}}\right)$$
$$\sin(\hat{\phi}) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\hat{\phi}} - e^{-i\hat{\phi}}\right)$$

Ainsi,

$$\cos(\hat{\phi})|n\rangle = \frac{1}{2}|n-1\rangle + \frac{1}{2}|n+1\rangle$$
$$\sin(\hat{\phi})|n\rangle = \frac{1}{2i}|n-1\rangle - \frac{1}{2i}|n+1\rangle$$

On obtient alors:

$$\langle n-1|\cos(\hat{\phi})|n\rangle = \langle n|\cos(\hat{\phi})|n-1\rangle = \frac{1}{2}$$
$$\langle n-1|\sin(\hat{\phi})|n\rangle = -\langle n|\sin(\hat{\phi})|n-1\rangle = \frac{1}{2i}$$

c) De la question précédente nous avons que $\langle n|\cos\hat{\phi}|n\rangle = \langle n|\sin\hat{\phi}|n\rangle = 0$. En utilisant les résultats obtenus juste avant, on tire :

Pour n>1 : $\begin{cases} \cos^2(\hat{\phi})|n\rangle = \cos(\hat{\phi})\left(\frac{1}{2}|n-1\rangle + \frac{1}{2}|n+1\rangle\right) = \frac{1}{4}|n-2\rangle + \frac{1}{2}|n\rangle + \frac{1}{4}|n+2\rangle \\ \sin^2(\hat{\phi})|n\rangle = \sin(\hat{\phi})\left(\frac{1}{2i}|n-1\rangle - \frac{1}{2i}|n+1\rangle\right) = -\frac{1}{4}|n-2\rangle + \frac{1}{2}|n\rangle - \frac{1}{4}|n+2\rangle \end{cases}$

Pour n=1 : $\begin{cases} \cos^2(\hat{\phi})|1\rangle = \cos(\hat{\phi})\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle\right) = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{4}|3\rangle \\ \sin^2(\hat{\phi})|1\rangle = \sin(\hat{\phi})\left(\frac{1}{2i}|0\rangle - \frac{1}{2i}|2\rangle\right) = \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{1}{4}|3\rangle \end{cases}$

Pour n=0 : $\begin{cases} \cos^2(\hat{\phi})|0\rangle = \cos(\hat{\phi})\left(\frac{1}{2}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{1}{4}|2\rangle \\ \sin^2(\hat{\phi})|0\rangle = \sin(\hat{\phi})\left(-\frac{1}{2i}|1\rangle\right) = \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{1}{4}|2\rangle \end{cases}$

Il s'ensuit que :

$$\langle n|\cos^2(\hat{\phi})|n\rangle = \langle n|\sin^2(\hat{\phi})|n\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}, n \neq 0 \\ \frac{1}{4}, n = 0 \end{cases}$$

De ce fait, l'incertitude sur la phase est $\Delta\cos\hat{\phi} = \sqrt{\langle n|\cos^2\hat{\phi}|n\rangle - \langle n|\cos\hat{\phi}|n\rangle^2}$

$$\Delta\cos(\hat{\phi}) = \Delta\sin(\hat{\phi}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, n \neq 0 \\ \frac{1}{2}, n = 0 \end{cases}$$

La phase est donc complètement indéterminée. On peut s'en apercevoir en comparant les résultats pour $n \neq 0$ avec le résultat classique pour une distribution uniforme de phase (c'est à dire quand la phase est complètement indéterminée). La densité de probabilité pour la phase ϕ est uniforme: $\rho(\phi) = \frac{1}{2\pi}$, d'où

$$\left.\begin{aligned} \langle\cos\phi\rangle &= \int_0^{2\pi} \cos\phi \cdot \rho(\phi)\mathrm{d}\phi = 0 \\ \langle\cos^2\phi\rangle &= \int_0^{2\pi} \cos^2\phi \cdot \rho(\phi)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta\cos\phi = \sqrt{\langle\cos^2\phi\rangle - \langle\cos\phi\rangle^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De la même manière on trouve que $\Delta\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui correspond avec les résultats obtenus pour l'état quantique $|n\rangle$.

d) De c) on tire que :

$$\langle n|\cos^2\hat{\phi}|n\rangle + \langle n|\sin^2\hat{\phi}|n\rangle = \begin{cases} 1, n \neq 0 \\ \frac{1}{2}, n = 0 \end{cases}$$