OPTIQUE II

Section de Physique
Professeur : R. Houdré
Exercices : K. Roux

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Série 10

2 Mai 2018

Introduction à l'optique quantique

Ex 1 : Etude des états de la lumière : les états cohérents

On considère un état cohérent $|\alpha\rangle$ défini de la manière suivante:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle$$

a) Vérifier la condition de normalisation $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$
(rappel: $\sum_n \frac{x^n}{n!} = e^x$)

b) Montrer que $|\alpha\rangle$ est un état propre de $\hat{a}$.

c) Déterminer l'incertitude Δn sur le nombre de photons.

d) Dans le cas d'un grand nombre de photons, déterminer les incertitudes sur la phase $\Delta\sin(\phi)$ et $\Delta\cos(\phi)$.

e) Comparer les résultats de b) et c) pour les produits $\Delta n \cdot \Delta\cos(\phi)$ et $\Delta n \cdot \Delta\sin(\phi)$ avec les relations d'incertitude issues des commutateurs $\left[\hat{n}, \cos(\hat{\phi})\right] = -i\sin(\hat{\phi})$ et $\left[\hat{n}, \sin(\hat{\phi})\right] = -i\cos(\hat{\phi})$.

f) Montrer que les états cohérents $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ ne sont pas orthogonaux.

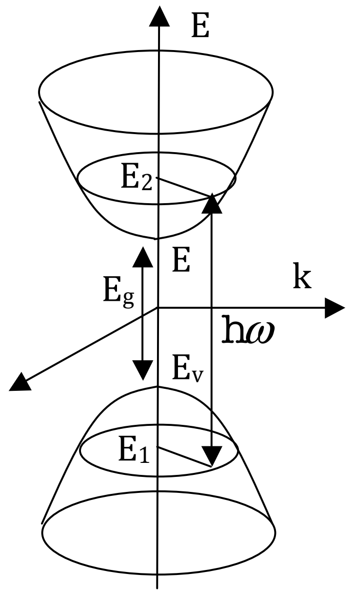
Aide : on donne les développements asymptotiques suivant

$$\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!\sqrt{n+1}} = \frac{e^{|\alpha|}}{|\alpha|}\left(1 - \frac{1}{8|\alpha|^2} + \ldots\right),\ |\alpha|^2 >> 1$$

$$\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!\sqrt{(n+1)(n+2)}} = \frac{e^{|\alpha|^2}}{|\alpha|}\left(1 - \frac{1}{2|\alpha|^2} + \ldots\right),\ |\alpha|^2 >> 1$$

Ex 2 : Absorption dans un semi-conducteur : Modèle des bandes paraboliques

On va étendre le calcul de l'absorption d'un système à deux niveaux au cas d'un système formé de deux bandes d'énergie parabolique comme illustré sur le schéma ci-dessous. De telle bandes permettent de décrire les propriétés des électrons dans les matériaux semi-conducteurs. Les relations de dispersion pour l'électron (masse m) sont données par $E_2 = E_c + \frac{\hbar^2}{2m}k^2$ et $E_1 = E_v + \frac{\hbar^2}{2m}k^2$ pour la bande supérieure et la bande inférieure respectivement (c.f. système 3D). E_c et E_v sont les énergies des extrema de chacune des bandes. On posera $E_g = E_c - E_v$.



a) Ecrire la relation entre le coefficient d'Einstein B_{12} et le temps de recombinaison spontanée.

b) On considère un photon d'énergie $\hbar\omega$. Quelles sont les transition possibles?

a) Déterminer le coefficient d'Einstein B_{12}^T intégré sur toutes les transitions possibles pour un photon d'énergie donnée. On supposera que le temps d'émission spontané est le même pour tous les états.

b) En déduire le coefficient d'absorption $\alpha(\hbar\omega)$ en supposant que tous les états de la bande inférieure sont occupés et tous ceux de la bande supérieure vides. Montrer qu'il se met sous la forme: $\alpha(\hbar\omega) = K(\hbar\omega) \times (\hbar\omega - E_g)^{1/2}$ en calculant explicitement *K*.

c) Calculer le coefficient $K(\hbar\omega)$. En déduire $\alpha(\hbar\omega)$ pour $(\hbar\omega - E_g) = 10^{-4}\,eV$.

Données: $n_g = 3.5$, $\lambda = 1.24\,\mu m$, $\tau_{sp} = 1\,ns$, $m = 0.01 m_e$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} kg = 0.51 \cdot 10^6\, eV/c^2$ et $c = 3 \cdot 10^{10}\, cm/s$

Correction

Ex 1 : Etude des états de la lumière : les états cohérents

a) Pour un état cohérent nous avons :

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n,m}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\langle m|n\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n,m}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\delta_{nm} = e^{-|\alpha|^2}\sum_n\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1$$

b) On calcule:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n\frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}\hat{a}|n\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n\frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}(n)^{1/2}|n-1\rangle \underset{m=n-1}{=} \alpha\cdot e^{-|\alpha|^2/2}\sum_m\frac{\alpha^{n-1}}{[m!]^{1/2}}|m\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

Il s'agit donc bien d'un état propre.

c) On calcule la quantité suivante :

$$\langle\alpha|\hat{n}^2|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\langle m|\hat{n}^2|n\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}n^2\delta_{nm} = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}n^2 =$$

$$= e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}n^2 = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}(n(n-1)+n) = e^{-|\alpha|^2}\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{(n-1)!}\right\} =$$

$$= e^{-|\alpha|^2}\left\{|\alpha|^4 e^{|\alpha|^2} + |\alpha|^2 e^{|\alpha|^2}\right\} = |\alpha|^4 + |\alpha|^2$$

L'incertitude sur le nombre de photon est donc :

$$\Delta n = \sqrt{\langle\alpha|\hat{n}^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle^2} = |\alpha|$$

d) On introduit la phase θ de la valeur propre complexe $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$. En applicant l'opérateur de phase à $|n\rangle$ on obtient :

$$\cos(\hat{\phi})|n\rangle = \frac{1}{2}|n-1\rangle + \frac{1}{2}|n+1\rangle, \qquad \sin(\hat{\phi})|n\rangle = \frac{1}{2i}|n-1\rangle - \frac{1}{2i}|n+1\rangle$$

$$\langle\alpha|\cos(\hat{\phi})|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\left\{\frac{1}{2}\langle m|n-1\rangle + \frac{1}{2}\langle m|n+1\rangle\right\}$$

$$= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{2}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^{m+1}(\alpha^*)^m}{(m!)^{1/2}((m+1)!)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^{n+1}}{(n!)^{1/2}((n+1)!)^{1/2}}\right\} = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}(\alpha^*)^n + \alpha^n(\alpha^*)^{n+1}}{(n!)^{1/2}((n+1)!)^{1/2}} =$$

$$= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n+1}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{n!(n+1)^{1/2}} = |\alpha|e^{-|\alpha|^2}\cos(\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!(n+1)^{1/2}}$$

de même, on trouve :

$$\langle\alpha|\sin(\hat{\phi})|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\left\{\frac{1}{2i}\langle m|n-1\rangle - \frac{1}{2i}\langle m|n+1\rangle\right\}$$

$$= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{2i}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^{m+1}(\alpha^*)^m}{(m!)^{1/2}((m+1)!)^{1/2}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^{n+1}}{(n!)^{1/2}((n+1)!)^{1/2}}\right\} = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}(\alpha^*)^n - \alpha^n(\alpha^*)^{n+1}}{(n!)^{1/2}((n+1)!)^{1/2}}$$

$$= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n+1}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{n!(n+1)^{1/2}} = |\alpha|e^{-|\alpha|^2}\sin(\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!(n+1)^{1/2}}$$

Comme les opérateurs $\cos\hat{\phi}$ et $\sin\hat{\phi}$ sont hermitiens, on obtient :

$$\langle m|\cos(\hat{\phi}) = \left(\cos(\hat{\phi})|m\rangle\right)^+ = \left(\frac{1}{2}|m-1\rangle + \frac{1}{2}|m+1\rangle\right)^+ = \frac{1}{2}\langle m-1| + \frac{1}{2}\langle m+1|$$

$$\langle m|\sin(\hat{\phi}) = \left(\sin(\hat{\phi})|m\rangle\right)^+ = \left(\frac{1}{2i}|m-1\rangle - \frac{1}{2i}|m+1\rangle\right)^+ = -\frac{1}{2i}\langle m-1| + \frac{1}{2i}\langle m+1|$$

D'où,

$$\langle\alpha|\cos^2(\hat{\phi})|\alpha\rangle = \langle\alpha|\cos(\hat{\phi})\cdot\cos(\hat{\phi})|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\left\{\frac{1}{2}\langle m-1| + \frac{1}{2}\langle m+1|\right\}\left\{\frac{1}{2}|n-1\rangle + \frac{1}{2}|n+1\rangle\right\} =$$

$$= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{4}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\langle m-1|n-1\rangle + \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\langle m-1|n+1\rangle + \\ \displaystyle + \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\langle m+1|n-1\rangle + \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\langle m+1|n+1\rangle\end{array}\right] =$$

$$= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{4}\left[\sum_{n}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} - 1 + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^{m+2}(\alpha^*)^m}{(m+2!)^{1/2}(m!)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^{n+2}}{(n!)^{1/2}(n+2!)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\right] =$$

$$= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{4}\left[2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} - 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n+2}(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})}{(n+2!)^{1/2}(n!)^{1/2}}\right] = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{2}\left[e^{|\alpha|^2} - \frac{1}{2} + |\alpha|^2\cos(2\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!(n+1)^{1/2}(n+2)^{1/2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-|\alpha|^2}}{4} + |\alpha|^2e^{-|\alpha|^2}\left(\cos^2(\theta) - \frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!(n+1)^{1/2}(n+2)^{1/2}}$$

$$\langle\alpha|\sin^2(\hat{\phi})|\alpha\rangle = \langle\alpha|\sin(\hat{\phi})\cdot\sin(\hat{\phi})|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\left\{-\frac{1}{2i}\langle m-1| + \frac{1}{2i}\langle m+1|\right\}\left\{\frac{1}{2i}|n-1\rangle - \frac{1}{2i}|n+1\rangle\right\}$$

$$= -\frac{e^{-|\alpha|^2}}{4}\left[\begin{array}{l}\displaystyle -\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\langle m-1|n-1\rangle + \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\langle m-1|n+1\rangle + \\ \displaystyle + \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\langle m+1|n-1\rangle - \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{(n!)^{1/2}(m!)^{1/2}}\langle m+1|n+1\rangle\end{array}\right] =$$

$$= -\frac{e^{-|\alpha|^2}}{4}\left[1 - \sum_{n}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^{m+2}(\alpha^*)^m}{(m+2!)^{1/2}(m!)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^{n+2}}{(n!)^{1/2}(n+2!)^{1/2}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\right] =$$

$$= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{4}\left[2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} - 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n+2}(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})}{(n+2!)^{1/2}(n!)^{1/2}}\right] =$$

$$= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{2}\left[e^{|\alpha|^2} - \frac{1}{2} - |\alpha|^2\cos(2\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!(n+1)^{1/2}(n+2)^{1/2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-|\alpha|^2}}{4} - |\alpha|^2e^{-|\alpha|^2}\left(\frac{1}{2} - \sin^2(\theta)\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!(n+1)^{1/2}(n+2)^{1/2}}$$

Finalement, en utilisant les dévelopements asymptotiques donnés, on trouve :

$$\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!(n+1)} = \frac{\exp(|\alpha|^2)}{|\alpha|}\left(1-\frac{1}{8|\alpha|^2}+\ldots\right), \qquad |\alpha|^2 >> 1$$

$$\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!(n+1)\,(n+2)} = \frac{\exp(|\alpha|^2)}{|\alpha|^2}\left(1-\frac{1}{2|\alpha|^2}+\ldots\right), \qquad |\alpha|^2 >> 1$$

Dans le cas d'un grand nombre moyen de photons $|\alpha| >> 1$

$$\langle\alpha|\cos(\hat\phi)|\alpha\rangle = \cos(\theta)\left(1-\frac{1}{8|\alpha|^2}+\ldots\right), \qquad \langle\alpha|\sin(\hat\phi)|\alpha\rangle = \sin(\theta)\left(1-\frac{1}{8|\alpha|^2}+\ldots\right)$$

$$\langle\alpha|\cos^2(\hat\phi)|\alpha\rangle = \frac{1}{2}-\frac{e^{-|\alpha|^2}}{4}+\left(\cos^2(\theta)-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2|\alpha|^2}+\ldots\right),$$

$$\langle\alpha|\sin^2(\hat\phi)|\alpha\rangle = \frac{1}{2}-\frac{e^{-|\alpha|^2}}{4}-\left(\frac{1}{2}-\sin^2(\theta)\right)\left(1-\frac{1}{2|\alpha|^2}+\ldots\right).$$

Ainsi, les incertitudes sur la phase $\Delta\cos\phi$ et $\Delta\sin\phi$ sont :

$$\Delta\cos(\phi) \approx \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{e^{-|\alpha|^2}}{4}+\left(\cos^2(\theta)-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2|\alpha|^2}\right)-\cos^2(\theta)\left(1-\frac{1}{4|\alpha|^2}\right)} =$$

$$\approx \sqrt{\frac{1}{4|\alpha|^2}-\frac{\cos^2(\theta)}{4|\alpha|^2}-\frac{e^{-|\alpha|^2}}{4}} \approx \frac{\sin(\theta)}{2|\alpha|}$$

$$\Delta\sin(\phi) \approx \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{e^{-|\alpha|^2}}{4}-\left(\frac{1}{2}-\sin^2(\theta)\right)\left(1-\frac{1}{2|\alpha|^2}\right)-\sin^2(\theta)\left(1-\frac{1}{4|\alpha|^2}\right)} =$$

$$\approx \sqrt{\frac{1}{4|\alpha|^2}-\frac{\sin^2(\theta)}{4|\alpha|^2}-\frac{e^{-|\alpha|^2}}{4}} \approx \frac{\cos(\theta)}{2|\alpha|}$$

e) Le commutateur de deux opérateurs $\left[\hat A,\hat B\right] = i\hat C$ amène la relation d'incertitude suivante :

$\Delta A.\Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\langle C\rangle\right|$

cf. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Quantum Mechanics – non-relativistic theory, Course of Theoretical Physics, Vol. 3

D'après les commutateurs $\left[\hat n,\cos\hat\phi\right] = -i\sin\hat\phi$ et $\left[\hat n,\sin\hat\phi\right] = -i\cos\hat\phi$ on attend une incertitude nombre de photons / phase de la forme :

$$\Delta n\cdot\Delta\cos(\phi) \geq \frac{1}{2}\left|\langle\sin\phi\rangle\right|, \qquad \Delta n\cdot\Delta\sin(\phi) \geq \frac{1}{2}\left|\langle\sin\phi\rangle\right|$$

Des résultats de b) et c) on tire que, pour un état cohérent :

$$\Delta n\cdot\Delta\cos(\phi) \approx |\alpha|\cdot\frac{\sin(\theta)}{2|\alpha|} = \frac{\sin(\theta)}{2} \approx \frac{1}{2}\left|\langle\alpha|\sin(\hat\phi)|\alpha\rangle\right|,$$

$$\Delta n\cdot\Delta\sin(\phi) \approx \frac{\cos(\theta)}{2} \approx \frac{1}{2}\left|\langle\alpha|\cos(\hat\phi)|\alpha\rangle\right|$$

Ce qui signifie qu'un état cohérent $|\alpha\rangle$ avec un grand nombre moyen de photons $|\alpha|$ a un produit d'incertitude minimum.

f) Pour deux états cohérents $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ on a :

$$\langle\beta|\alpha\rangle = e^{-|\beta|^2/2}e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n,m}\frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}\frac{\beta^{*m}}{(m!)^{1/2}}\langle m|n\rangle = e^{-|\beta|^2/2-|\alpha|^2/2}\sum_n\frac{(\alpha\beta^*)^n}{n!} = \exp\left\{-\frac{|\alpha|^2}{2}+\alpha\beta^*-\frac{|\beta|^2}{2}\right\}$$
$$\Rightarrow |\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = \exp\left\{-|\alpha|^2+\alpha\beta^*+\alpha^*\beta-|\beta|^2\right\} = \exp\left\{-|\alpha-\beta|^2\right\}$$

Il s'ensuit que ces états ne sont pas orthogonaux, mais qu'ils le deviennent quasiment si $|\alpha-\beta|$ est beaucoup plus grand que 1.

Ex 2 : Absorption dans un semiconducteur : Modèle des bandes paraboliques

a) $B_{12} = \dfrac{c^3}{8\pi h\nu^3}\times\dfrac{1}{\tau_{sp}} = \dfrac{c^3h^2}{8\pi(\hbar\omega)^3}\times\dfrac{1}{\tau_{sp}}$ avec $\hbar\omega$ l'énergie de transition entre les deux niveaux.

b) Pour qu'il y ait une transition d'une bande à l'autre par l'absorption d'un photon d'énergie $\hbar\omega$, il faut respecter la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement:

$$E_2 = E_1 + \hbar\omega \qquad \text{et} \qquad \hbar\vec{k}_2 = \hbar\vec{k}_1 + \hbar\vec{k}_{photon} \approx \hbar\vec{k}_1$$

On néglige la quantité de mouvement du photon par rapport à celle de l'électron.

c) $$B_{12}^T = \frac{2V}{(2\pi)^3}\int_{\substack{\text{dans l'espace des } k\\ \text{tel que } \vec{k}_1=\vec{k}_2}} B_{12}(k_1,k_2)\times\delta(E_2-E_1-\hbar\omega)\,dk_x dk_y dk_z$$

on a $E_2 - E_1 = E_c + \dfrac{\hbar^2}{2m}k^2 - E_v - \dfrac{\hbar^2}{2m}k^2 = E_g - \dfrac{\hbar^2}{m}k^2$

$$B_{12}^T = \frac{V}{4\pi^3}B_{12}\int_0^\infty \delta\left(E_g+\frac{\hbar^2}{m}k^2-\hbar\omega\right)4\pi k^2 dk$$ (c.f. série 6 calcul densité d'états)

en posant $x = E_g + \dfrac{\hbar^2}{m}k^2 - \hbar\omega$, on obtient:

$$B_{12}^T = \frac{V}{2\pi^2}B_{12}\left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_{E_g-\hbar\omega}^\infty\left(\frac{m}{\hbar^2}x - E_g + \hbar\omega\right)^{1/2}\delta(x)\,dx$$

$$B_{12}^{T} = \frac{V}{2\pi^2} B_{12} \frac{m^{3/2}}{\hbar^2} \left(\hbar\omega - E_g\right)^{1/2}$$ qui peut s'écrire:

$$B_{12}^{T} = V \times B_{12} \times \rho(\omega)$$

$$\rho(\omega) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^2} \left(\hbar\omega - E_g\right)^{1/2}$$ appelé ici la densité d'état jointe (c.f. serie 6)

d) $\alpha(\hbar\omega) = \frac{\bar{n}}{\tau_{sp}} \frac{1}{c/n_g} = P_{abs} \times \frac{1}{c/n_g}$ avec $P_{abs} = N_1 B_{12} s(\omega)$ (c.f. cours) et n_g l'indice de groupe du matériau.

ici $N_1 = V \times \rho(\omega)$ et $s(\omega) = \frac{\hbar\omega}{V} \delta(\omega)$

$$\alpha(\hbar\omega) = \frac{1}{c/n_g} \times \frac{\hbar\omega}{V} \times V \times B_{12} \times \rho(\omega) \times f_1(E_1) \times \left(1 - f_2(E_2)\right)$$

$f_1(E_1) = 1$ le taux d'occupation de l'état E_1

$\left(1 - f_2(E_2)\right)$=1 le taux d'inoccupation de l'état E_2

On a donc:

$$\alpha(\hbar\omega) = K\left(\hbar\omega - E_g\right)^{1/2} \text{ avec } K = \frac{n_g c^2 m^{3/2}}{4\pi} \times \frac{1}{(\hbar\omega)^2} \times \frac{1}{\tau_{sp}}$$

e) Pour $\lambda = 1.24\mu m$, on a $\hbar\omega = 1eV$

$$K = \frac{3.5 \times \left(0.01 \times 0.51 \cdot 10^6\right)^{3/2}}{4\pi \times 3 \cdot 10^{10}} \times \frac{1}{(1)^2} \times \frac{1}{10^{-9}} \; eV^{-1/2} cm^{-1}$$

$$K \approx 3400 \; eV^{-1/2} cm^{-1}$$

On en déduit: $\alpha(\hbar\omega) = 34 cm^{-1}$