OPTIQUE II
Section de Physique
Professeur : R. Houdré
Exercices : K. Roux

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Série 10

9 Mai 2018

Interaction matière rayonnement

Ex. 1 : Coefficients d'Einstein

Nous étudions l'interaction du rayonnement électromagnétique avec un gaz d'atomes identiques dans une enceinte (cavité 3D). On considère deux niveaux atomiques d'énergies E_1 et E_2 ($E_2 > E_1$) et de dégénérescences respectives g_1 et g_2. Soient N_1 et N_2 les nombres des populations d'atomes sur chaque niveau. Soit $W(\omega)$ la densité d'énergie de la radiation à la pulsation ω.

a) On suppose que la densité d'énergie électromagnétique varie lentement avec ω dans le voisinage de la fréquence de transition. Quelle est la conséquence sur les taux de transition ?

b) Ecrire l'équation pour les taux d'évolution de N_1 et N_2.

c) On suppose le système à l'équilibre thermique. Montrer que $\frac{A_{21}}{B_{21}W(\omega)} = \frac{1}{\bar{n}} = \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1$

d) Pour quelle longueur d'onde λ_t a-t-on $1/\bar{n} = 1$?

e) Discuter la relation obtenue à la question c) quand $\lambda > \lambda_t$ et $\lambda < \lambda_t$.

Ex 2 : Modèle de Lorentz

Dans le modèle de Lorentz, un milieu dispersif et absorbant est caractérisé par une collection d'oscillateurs harmoniques (dipôles) de masse m, de charge e et de fréquence naturelle ω_0, en présence d'une force d'amortissement. On notera β le coefficient d'amortissement.

a) On suppose que le dipôle est excité par un champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{H})$. On ne tiendra pas compte de la partie inductive de la force de Lorentz. Ecrire l'équation du mouvement. On notera $\vec{u}$ le déplacement de la charge par rapport à sa position d'équilibre.

b) On s'intéresse au régime forcé : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$. Exprimer la relation entre $\vec{u}$ et $\vec{E}$.

c) En déduire la polarisabilité P du milieu pour une densité N d'oscillateurs.

d) Ecrire le carré de l'indice de réfraction complexe $\tilde{n}^2(\omega)$ obtenu dans le cadre de ce modèle.

e) Déterminer la partie réelle $n(\omega)$ et la partie imaginaire $\kappa(\omega)$ de $\tilde{n}(\omega)$.

f) Tracer l'allure de $n(\omega)$ et $\kappa(\omega)$.

g) On s'intéresse maintenant au régime transitoire. A un instant t_0=0, on éteint le champ électromagnétique. Déterminer u(t) pour t>t_0. On supposera b<<w_0.

h) Calculer la puissance P_{rad} rayonnée par le dipôle.

Indication : On rappelle qu'en électromagnétique classique une charge accélérée rayonne dans le champ lointain un champ électromagnétique $\vec{E}(\vec{R},t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\ddot{\vec{u}}(t-R/c)\right)}{R}$ et $\vec{H}(\vec{R},t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{n}\times\vec{E}(\vec{R},t)$ avec $\vec{n}$ le vecteur unitaire dans la direction d'émission. L'accélération est évaluée au temps « retardé » (t-R/c) qui tient compte de la propagation.

i) Déterminer le temps de relaxation t de l'énergie stockée dans le dipôle.

j) En supposant $u_0=10^{-10}$m, calculer t pour une longueur d'onde de 1cm, 100µm, 1µm et 0.1µm.

k) Quelle relation existe-t-il entre β et t ? Commenter.

Correction

Ex. 1 : Coefficients d'Einstein

a) Les taux de transition sont proportionnels à la densité d'énergie.

b) $dN_1 / dt = -dN_2 / dt = N_2 A_{21} - N_1 B_{12} W(\omega) + N_2 B_{21} W(\omega)$

c) En utilisant la relation d'Einstein $\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B_{21} = A_{21}$ et en comparant avec la loi de Planck $W(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}$, on obtient:

$$A_{21} / \left(B_{21} W(\omega)\right) = \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1$$

Pour montrer que $\bar{n} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}$, soit on se réfère au chapitre 4 du cours, soit on écrit:

$\bar{n} = \sum_n n P_n$ avec P_n le facteur de Boltzmann

$$P_n = \frac{\exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)}{\sum_n \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)} = \frac{\exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)}{\sum_n \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)} = \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right)$$

et on utilise

$$\sum_n n \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right) = -d\left(\sum_n \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)\right) / d\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right)^{-2}$$

d) $1/\bar{n} = 1$ => $\hbar\omega = kT \ln 2$ or à 300K $kT = 25 meV$ et en outre $E_{[eV]} \approx \frac{1.24}{\lambda_{[\mu m]}}$ d'où $\lambda_t \approx 70 \mu m$

e) Pour des longueurs d'onde supérieures à 70µm, le taux d'émission stimulée thermiquement est supérieur au taux d'émission spontanée.

Pour des longueurs d'onde inférieures à 70µm, c'est le contraire : le taux d'émission stimulée thermiquement est inférieur au taux d'émission spontanée.

Ex 2 : Modèle de Lorentz

a) On utilise l'équation de Newton :
$m(\ddot{\vec{u}}+\beta\dot{\vec{u}}+\omega_0^2\vec{u})=-e\vec{E}$
avec $\ddot{\vec{u}}$ l'accélération, $-m\omega_0^2\vec{u}$ la force de rappel, $-m\beta\dot{\vec{u}}$ la force d'amortissement proportionnelle à la vitesse $\dot{\vec{u}}$.

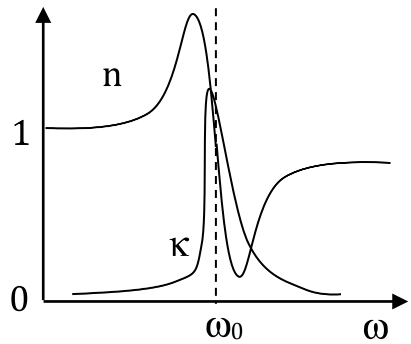
b) En effectuant les dérivés par rapport au temps on trouve :
$\vec{u}=\frac{e\vec{E}}{m}\left(\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i\omega\beta}\right)$

c) $P=Ne\vec{u}=\varepsilon_0\left(\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2+i\omega\beta}\right)\vec{E}$ avec $\omega_p^2=\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$

d) $\tilde{n}^2(\omega)=1+\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\beta}$

e) En identifiant les parties réelles et imaginaires on trouve:
$$n^2-\kappa^2=1+\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\beta^2}$$
$$2n\kappa=-\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{\omega\beta}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\beta^2}$$
On en déduit une équation du second degré pour $n(\omega)$ et $\kappa(\omega)$ dont les solutions sont immédiates. Dans le cas où on néglige l'absorption on obtient:
$$n^2=\varepsilon=1+\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\beta^2}$$

f) La fréquence de résonnance ω_0 est très supérieure au terme de relaxation. Donc $2n\kappa$ a une valeur significative seulement pour ω proche de ω_0. En remplaçant ω par ω_0 sauf pour les facteurs $\omega_0-\omega$, on trouve que $2n\kappa$ a la forme d'une Lorentzienne et κ est une Lorentzienne distordue, dont la distorsion dépend de $\omega\beta\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$.



g) Avec l'hypothèse $\beta \ll \omega_0$, l'équation différentielle sans second membre donne
$\vec{u}=\vec{u}_0\cos(\omega_0 t)e^{-(\beta/2)t}$

h) Le flux instantané d'énergie électromagnétique est donné par le vecteur de Poynting :

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 c^4}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{1}{R^2}(\vec{n}\times\ddot{\vec{u}})^2\vec{n} = \frac{e^2\ddot{u}^2\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}\vec{n}$$

Pour obtenir la puissance rayonnée totale P_{rad} il suffit d'intégrer le vecteur de Poynting sur une sphère entourant le dipôle :

$$P_{rad} = \int_{\text{sphère}} \vec{S}\cdot d\vec{a} = 4\pi\frac{2}{3}\frac{e^2\ddot{u}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{u}^2$$

Avec l'hypothèse $\beta \ll \omega_0$, les variations de u(t) liées au déclin exponentiel peuvent être négligées par rapport à celles du cosinus, *i.e.* $\ddot{u}(t) \approx -\omega_0^2 u(t)$ (on a dérivé deux fois la fonction cosinus)

d'où

$$P_{rad} = \frac{e^2u^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\omega_0^4 = \frac{\mu^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\omega_0^4$$ avec μ=eu le moment dipolaire.

On retrouve la variation en ω^4 de la diffusion Rayleigh.

i) La polarisation induite est $eu = eu_0\cos(\omega_0 t)e^{-(\beta/2)t}$. L'énergie induite stockée est donc de la forme $W = W_0e^{-\beta t} = W_0 e^{-t/\tau}$, avec t le temps de relaxation.

Par ailleurs la puissance rayonnée $P_{rad} = -\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\tau}W$

D'où :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{W}\frac{\mu^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\omega_0^4 = \frac{1}{W_0}\frac{\mu_{(t=0)}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\omega_0^4$$

en prenant $W_0 = \hbar\omega$ on trouve :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\mu_{(t=0)}^2}{3h\varepsilon_0 c^3}\omega_0^3$$

j) Pour λ=1cm, n=30GHz et t=3.5jours
Pour λ =100µm, n=3THz et t=0.3s
Pour λ =1µm, n=3.10^{14} Hz et t=0.3µs
Pour λ =0.1µm, n=3.10^{15} Hz et t=0.3ns

k) On a β=1/t. Le modèle de Lorentz permet de relier simplement la dissipation et la largeur de raie spectrale. En d'autre terme ce modèle permet de relier la décohérence et la dissipation.