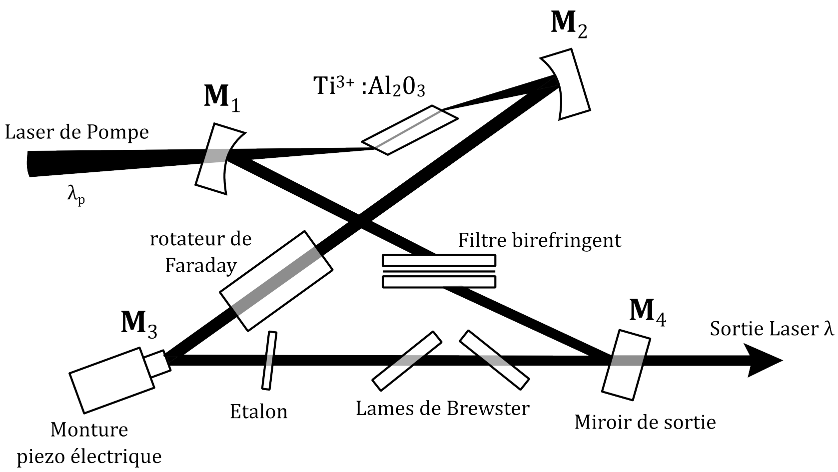
**OPTIQUE II**
Section de Physique
Professeur : R. Houdré
Exercices : K. Roux

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Série 14
**30 Mai 2015**
**Lasers**

## Ex : Étude d'un laser titane-saphir ($Ti^{3+}:Al_2O_3$)

### I/ Fonctionnement continu, monomode et accordable en fréquence




La figure précédente est une version simplifiée d'un laser titane-saphir.

1. Quel est le milieu amplificateur ?
2. Quel est le type de cavité? Combien de miroirs dans cette cavité?
3. Quel est le rôle du filtre biréfringent, les lames de Brewster et de l'étalon constitué par un interféromètre de Fabry-Perot ?
4. Quel est le régime de fonctionnement de ce laser ?
5. Quel est l'intérêt de monter le miroir $M_3$ sur une cale piezo électrique permettant son déplacement nanométrique ?
6. Que peut-on dire de la longueur d'onde de pompage par rapport à la longueur d'onde d'émission laser?

### II/ Pertes et fréquence de résonance de la cavité

Soit $R_i = 1 - T_i$ le coefficient de réflexion du miroir $M_i$, $\eta = \dfrac{\Delta I}{I}$ la diminution relative d'intensité due aux pertes « hors miroirs » pour un tour dans la cavité, L la longueur du milieu amplificateur et d la longueur optique de la cavité.

1. Exprimer le coefficient de pertes totales $\alpha_p$ en fonction de L, $R_i$ et $\eta$.
2. Exprimer les fréquences de résonance $\nu_q$ des modes longitudinaux $TEM_{00q}$ de la cavité passive en fonction de d,c, et d'un nombre entier positif q. Quel est le temps T mis par la lumière pour faire un tour de cavité ?
3. Déterminer la durée de vie des photons $\tau_c$ dans la cavité. Relier $\tau_c$ à T.
4. A.N. : $T_1=T_2=T_3=1\%$, $T_4=4\%$, $\eta=27.3\%$, L=2cm, d=0.9m. Calculer $\alpha_p$, $\tau_c$ et T

## III/ Amplification de l'onde laser dans le cristal amplificateur de Titane-saphir

Soit G le gain du cristal. L'onde laser, supposée plane et homogène se propage dans le cristal suivant l'axe Oz. Son intensité est $I_0$ à l'entrée (z=0), I(z) au point d'abscisse z, et $GI_0$ a la sortie du cristal (z=L). On désigne par $\gamma(z)$ le coefficient d'amplification saturé du cristal à l'abscisse z, $\gamma_0$ le coefficient d'amplification non saturé (le pompage est uniforme dans le cristal), $G_0$ le gain non saturé et $I_S$ l'intensité de saturation. Le gain du cristal amplificateur est important.

1. Rappeler la définition de $\gamma(z)$. Expliquer la relation : $G_0 = \exp(\gamma_0 L)$
2. Ecrire la relation de saturation donnant $\gamma(z)$ en fonction de $\gamma_0$, I(z) et $I_s$.
3. Ecrire et intégrer l'équation différentielle donnant I(z)
4. Démontrer que G et $I_0$ sont reliés par l'équation suivante :

$$I_0(G-1) = I_S \ln(G_0 / G) \qquad [1]$$

## IV/ Pompage et inversion de population dans le cristal amplificateur

Le titane-saphir est un cristal $Al_2O_3$ dont 0.15% des ions $Al^{3+}$ sont remplacés par des ions $Ti^{3+}$ responsables de l'effet laser. Les états fondamental et excité de l'ion $Ti^{3+}$ sont élargis par les vibrations du cristal : la « transition de pompage » a lieu du niveau vibrationnel le plus bas (0) de l'état fondamental vers un niveau vibrationnel plus élevé (3) de l'état excité. La transition laser a lieu du niveau vibrationnel le plus bas de l'état excité (2) vers un niveau vibrationnel élevé (1) de l'état fondamental. Ces 4 niveaux sont non dégénérés. Les niveaux (3) et (1) se désexcitent de façon non radiative resp. vers les niveaux (2) et (0). Le titane-saphir est un milieu à élargissement homogène d'indice optique n. On donne les grandeurs suivantes :

- $N_t$ la densité volumique des ions $Ti^{3+}$. $N_g$ est la population du niveau (0), $N_1$, $N_2$, $N_3$ les populations resp. des niveaux (1), (2), (3). La somme des populations est égale à $N_t$ (le système est fermé)
- Pour la transition de pompage (0)→(3), la probabilité par seconde $W_p$ d'absorption
- Pour la transition laser (2)→(1), la section efficace $\sigma(\nu)$, le profil normé $g(\nu-\nu_0)$ de la fonction spectrale avec un maximum à la fréquence $\nu_0$ et de largeur $\Delta\nu$, la probabilité par seconde W d'absorption et d'émission stimulée par une onde progressive d'intensité I, la probabilité par seconde A d'émission spontanée.
- Les probabilité de désexcitation (3)→(2) et (1)→(0) sont très grandes devant A, W et $W_p$

1. Dessiner le schéma décrivant les processus de conversion d'énergie qui interviennent dans le système des niveaux (0), (1), (2) et (3). Rappeler la définition de W et sa relation avec I
2. Sachant que la largueur $\Delta\nu$ est très grande ( $\Delta\nu / \nu_0 \approx 1/4$ ), exprimer la section efficace $\sigma(\nu)$ en fonction de $\nu$, $g(\nu-\nu_0)$, $\nu_0$, A, n et c. (utiliser les relations d'Einstein)
3. Pourquoi peut-on considérer que les populations $N_1$ et $N_3$, ainsi que leurs dérivées temporelles sont négligeables à tout instant ? Ecrire dans ces conditions l'équation différentielle d'évolution temporelle de la population $N_2$.

   On se place maintenant à pompage constant et en régime stationnaire

4. Exprimer la différence de population $\Delta N=N_2-N_1$ en fonction de $N_t$, A, W, et $W_p$ puis la valeur $\Delta N_0$ de $\Delta N$ en l'absence d'onde laser dans la cavité et la valeur du rapport $\Delta N/\Delta N_0$.
5. Déterminer l'intensité de saturation $I_S(\nu)$ à la fréquence $\nu$, $I_S(\nu_0)$ à la fréquence $\nu_0$, ainsi que celle du rapport $I_S(\nu)/I_S(\nu_0)$ en fonction du profil normé.
6. Exprimer $\Delta N/\Delta N_0$ en fonction du paramètre de saturation $\chi = I/I_S(\nu_0)$ et du profil normé
7. On introduit les coefficients d'amplification saturée $\gamma(\nu)$ et d'amplification non saturée $\gamma_0(\nu)$. Démontrer que le rapport $\gamma(\nu)/\gamma_0(\nu)$ peut s'écrire de la façon suivante :
$$\frac{\gamma(\nu)}{\gamma_0(\nu)} = \frac{\nu/\nu_0}{\chi + [g(0)/g(\nu-\nu_0)]} \qquad [2]$$
8. A.N. : $N_t$=5,0.10$^{25}$ m$^{-3}$, A=3,1.10$^{5}$ s$^{-1}$, $W_p$=A/20, $\nu_0$ =3,8.10$^{14}$ Hz, $\sigma(\nu_0)$=4,2.10$^{-23}$ m$^2$. Calculer $N_0$, $I_S(\nu_0)$ et $\gamma_0(\nu_0)$. En déduire le rapport de pompage $\gamma_0(\nu_0)/\alpha_P$ .

longitudinaux $TEM_{00q}$ ainsi que la durée d'un cycle dans la cavité. En déduire le nombre N de modes longitudinaux oscillant dans cette cavité.

## Correction

# Ex : Étude d'un laser titane-saphir ($Ti^{3+}:Al_2O_3$)

## I/ Fonctionnement continu, monomode et accordable en fréquence

1. Le milieu amplificateur est le cristal de titane-saphir qui se situe entre les miroirs $M_1$ et $M_2$.
2. Cette cavité est un exemple de cavité en anneau. Elle est composée de 4 miroirs. Une onde peut se propager dans les deux sens dans cette cavité (1234) ou (4321). Afin de ne supporter qu'un seul sens de propagation pour le rayonnement laser (par exemple 1234), on ajoute généralement un dispositif dans la cavité afin d'induire des pertes sur l'onde se propageant dans le sens opposé (4321) tel un *circulateur optique* ou un *rotateur de Faraday*.
3. Le filtre biréfringent (par exemple un *filtre de Lyot*), et l'étalon Fabry-Perot servent à sélectionner la longueur d'onde d'émission du laser et de rendre le laser monomode. Les lames de Brewster servent à sélectionner la polarisation d'émission du laser.
4. Ce laser fonctionne en régime continu. Le milieu amplificateur est pompé de façon continue et la lumière laser émise est continue.
5. Monter le miroir $M_3$ sur un support piézo-électrique permet de modifier la longueur de la cavité de très petites longueurs afin de pouvoir accorder finement et continument la fréquence du mode $TEM_{00q}$.
6. La longueur d'onde du pompage doit forcément être plus petite que la longueur d'onde d'émission du laser. Il faut que l'énergie des photons de pompe soit plus grande que l'énergie des photons émis.
   Le laser de pompe pour un laser Titane-saphir est généralement un laser $Nd^{3+}$ :YAG

## II/ Pertes et fréquence de résonnance de la cavité

1. La cavité se compose de 4 miroirs de coefficient de réflexion $R_1$, $R_2$, $R_3$ et $R_4$. Pour un cycle de la lumière dans la cavité, on a la relation suivante :
   $$I_0 - \Delta I = I_0 \exp(-\alpha_p L) = I_0 R_1 R_2 R_3 R_4 (1-\eta)$$
   D'ou la relation $\alpha_p = \dfrac{1}{L}\ln(\dfrac{1}{R_1 R_2 R_3 R_4 (1-\eta)})$
   Attention : L est la longueur du milieu d'amplification et non la longueur de la cavité.
   Les pertes $\alpha_p$ sont définies par unité de longueur du milieu amplificateur. De plus, **dans le cas d'une cavité linéaire**, la lumière passe 2 fois par le milieu amplificateur lors d'un cycle dans la cavité. Il faut donc faire intervenir un facteur 2 dans la longueur du milieu amplificateur « vu » par la lumière. La relation s'écrirait dans ce cas $\alpha_p = \dfrac{1}{2L}\ln(\dfrac{1}{R_1 R_2 R_3 R_4 (1-\eta)})$.
2. Pour une cavité en anneau, $\nu_q = q\dfrac{c}{d}$.
   Pour faire un tour dans la cavité, la lumière met $T = d/c$ .

3. La perte d'intensité est identique lors d'un cycle dans la cavité si on le considère temporellement ou spatialement : $I(d)=\exp\left(-\alpha_p d\right) \Leftrightarrow I(T)=\exp\left(-\frac{T}{\tau_c}\right)$

   avec T=d/c

   Ainsi on trouve : $\tau_c=\frac{d}{\alpha_p cL}=\frac{T}{\alpha_p L}=-\frac{T}{\ln\left(R_1R_2R_3R_4(1-\eta)\right)}$

4. A.N. : $\alpha_p=20\ \mathrm{m}^{-1}$ $\alpha_p=20\ \mathrm{m}^{-1}$, $\tau_c=7.5$ ns et $T=3$ ns

III/ Amplification de l'onde laser dans le cristal amplificateur de Titane-saphir

1. Le coefficient d'amplification est défini par la relation suivante : $\gamma(z)=\frac{1}{I(z)}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z}$

   Le gain non saturé $\gamma_0$ est le coefficient d'amplification lorsque l'on à la condition $I(z)<<I_S$. Comme $\gamma_0$ ne dépends ni de I, ni de z, la définition du coefficient d'amplification non saturé devient : $\gamma_0=\frac{1}{I(z)}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z}$. L'intégration donne : $I(z)=I_0\exp\left(\gamma_0 z\right)$, d'ou le gain non saturé : $G_0=\exp\left(\alpha_0 L\right)$

2. La relation de saturation donne: $\gamma(z)=\frac{\gamma_0}{1+\frac{I(z)}{I_S}}$

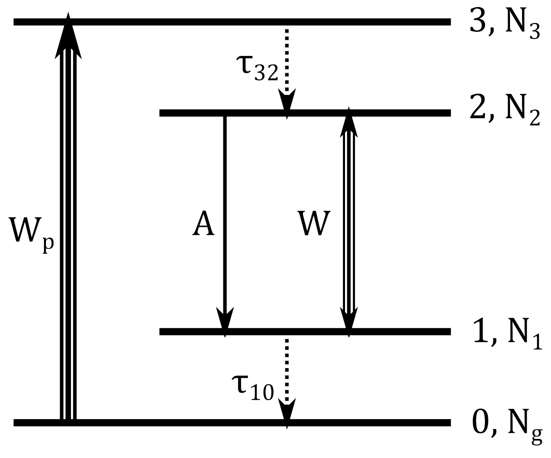
3. À partir de la relation du III/2. et de la définition du coefficient d'amplification, on trouve la relation suivante : $\gamma_0=\left(\frac{1}{I(z)}+\frac{1}{I_S}\right)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z}$

   L'intégration donne : $\ln\left(\frac{I(z)}{I_0}\right)+\frac{I(z)-I_0}{I_S}=\gamma_0 z$ ..... [4]

4. En posant la relation z =L, $G=I(L)/I_0$ et le fait que $\ln\left(G_0\right)=\gamma_0 L$, on trouve bien la relation en remplaçant dans [4] : $I_0(G-1)=I_S\ln\left(\frac{G_0}{G}\right)$

IV/ Pompage et inversion de population dans le cristal amplificateur

1.



W définit à la fois la probabilité d'absorption par seconde et la probabilité d'émission stimulée par seconde. En effet, les deux probabilités sont identiques dans le cas où les niveaux énergétiques ne sont pas dégénérés ($B_{21}$=$B_{12}$=B).

La définition du cours donne : $W = \sigma(\nu)\frac{I}{h\nu}$

Rappel : En faisant apparaître le coefficient d'Einstein B on obtient: $W = Bug(\nu - \nu_0)$ où u est la densité d'énergie du mode et $g(\nu - \nu_0)$ le profil spectral de la transition

2. On peut écrire $I = cu / n$
La section efficace se note donc $\sigma(\nu) = Bnh\nu g(\nu - \nu_0) / c$

En utilisant les relations d'Einstein, on a : $\frac{A}{B} = 8\pi hn^3\nu_0^3 / c^3$

D'où : $\sigma(\nu) = \frac{Ac^2\nu g\left(\nu - \nu_0\right)}{8\pi n^2\nu_0^3}$

3. Les probabilités de désexcitation (3)→(2) et (1)→(0) sont très grandes devants les autres probabilités de transition. Ainsi, les niveaux (3) et (1) se vident plus vite qu'ils ne peuvent se remplir. Leur population va donc être négligeable, tout comme leur variation.
Les populations sont reliées par l'équation $N_t = N_2 + N_g$

L'équation différentielle donnant l'évolution de la population $N_2$ est :

$$\frac{dN_2}{dt} = W_p N_g - (A+W)N_2 + WN_1 = W_P N_t - (A + W_p + W)N_2 \quad \text{.........[6]}$$

car $N_1 \approx 0$ et $N_3 \approx 0$

4. Le régime stationnaire impose que la dérive temporelle de l'évolution de $N_2$ s'annule :

[6] $\Rightarrow W_P N_t - (A + W_P + W)N_2 = 0$ , d'où : $\Delta N = N_2 = \frac{W_P}{A + W_P + W} N_t$

$\Delta N_0$ est la différence de population non saturée, i.e. lorsqu'il n'y a pas d'intensité dans le milieu amplificateur. On est alors dans le cas où $W = 0$ car aucune émission stimulée ni d'absorption ne peux avoir lieu.

On trouve alors : $\Delta N_0 = \frac{W_P}{A + W_P} N_t$

Le rapport $\Delta N / \Delta N_0$ vaut donc : $\frac{\Delta N}{\Delta N_0} = \frac{1}{1 + \frac{W}{W_P + A}}$

5. D'après le cours, $\frac{\Delta N}{\Delta N_0} = \frac{1}{1 + \frac{I}{I_S}}$. Par identification avec le résultat de la question précédente, on trouve alors que $\frac{I}{I_S} = \frac{W}{W_P + A}$.

En utilisant la relation de la question IV/1. : $W = \sigma(\nu)\frac{I}{h\nu}$, on trouve que

$$I_S(\nu) = \left(W_P + A\right)\frac{h\nu}{\sigma(\nu)}$$

De même, $I_S(\nu_0) = \left(W_P + A\right)\dfrac{h\nu_0}{\sigma(\nu_0)}$.

On obtient alors $\dfrac{I_S(\nu)}{I_S(\nu_0)} = \dfrac{\nu}{\sigma(\nu)}\dfrac{\sigma(\nu_0)}{\nu_0} = \dfrac{g(\nu_0-\nu_0)}{g(\nu-\nu_0)} = \dfrac{g(0)}{g(\nu-\nu_0)}$ grâce à la relation du IV/1. : $W = Bug(\nu-\nu_0) = \sigma(\nu)\dfrac{I}{h\nu}$

6. En prenant pour équation de départ : $\dfrac{\Delta N}{\Delta N_0} = \dfrac{1}{1+\dfrac{I(\nu)}{I_S(\nu)}}$, et faisant apparaître $I_S(\nu_0)$, on trouve : $\dfrac{\Delta N}{\Delta N_0} = \dfrac{1}{1+\dfrac{I}{I_S(\nu_0)}\dfrac{I_S(\nu_0)}{I_S(\nu)}} = \dfrac{1}{1+\chi\dfrac{g(\nu-\nu_0)}{g(0)}}$

7. D'après le cours, $\gamma(\nu) = \Delta N\sigma(\nu)$ et $\gamma_0(\nu_0) = \Delta N_0\sigma(\nu_0)$. On trouve donc :

$$\frac{\gamma(\nu)}{\gamma_0(\nu_0)} = \frac{\sigma(\nu)\Delta N}{\sigma(\nu_0)\Delta N_0} = \frac{\nu g(\nu-\nu_0)}{\nu_0 g(0)}\frac{1}{1+\chi\dfrac{g(\nu-\nu_0)}{g(0)}} = \frac{\nu/\nu_0}{\chi+\left[g(0)/g(\nu-\nu_0)\right]}$$

8. A.N.: $N_0 = 2{,}38.10^{24}\,\mathrm{m}^{-3}$, $I_S(\nu_0) = 1{,}05\ \mathrm{GW.m}^{-2}$, $\gamma_0(\nu_0) = 100\mathrm{m}^{-1}$ et $\dfrac{\gamma_0(\nu_0)}{\alpha_P} = 5$