CORRIGÉ DE L'EXERCICE 7
FEUILLE 1

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Voici une solution de trois derniers points de l'exercice 7. Les 3 premiers on été faits en cours, sans trop de complications.

***Exercice 7* (Nombres de Bernoulli).** — *La suite de Bernoulli $(B_i)_{i\geq 0}$ est définie à partir de l'égalité suivante*

$$\sum_{i\geq 0} B_i \frac{y^i}{i!} = \frac{y}{e^y - 1},$$

et pour chaque $i \geq 0$ le polynôme de Bernoulli $B_i(x)$ est le seul polynôme de degré i tel que

$$\int_x^{x+1} B_i(t)dt = x^i.$$

En particulier, $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, etc.

(I) Prouver que pour tout $j > 1$ impair, on a $B_j = 0$.

(II) Prouver que pour tout $j > 1$ on a que $B_j(0) = B_j(1)$.

(III) Prouver que pour tout $j \geq 1$, $B_j'(x) = jB_{j-1}(x)$.

(IV) Posons $B_j^* := B_j(0)$. Prouver que

$$B_j(x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} B_i^* x^{j-i}.$$

Solution : *On écrit*

$$B_j(x) = c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0.$$

En dérivant i fois et posant $x = 0$, on obtient que

$$B_j^{(i)}(0) = i!c_i.$$

D'après le point (III), on voit que

$$B_j^{(i)}(0) = jB_{j-1}^{(i-1)}(0) = j(j-1)B_{j-2}^{(i-2)}(0) =$$
$$= \ldots = j(j-1)\ldots(j-i+1)B_{j-i}(0) = \frac{j!}{(j-i)!}B_{j-i}^*.$$

Cela nous donne l'égalité $c_i = \binom{j}{i}B_{j-i}^*$ et on a conclu.

(V) Prouver que pour tout $j > 1$,

$$\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} B_i = 0.$$

Solution : *Pour cela il faut tout simplement utiliser la série convergente pour $e^y - 1$ pour déduire l'égalité*

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} B_i \frac{y^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y^i}{i!}\right) = y,$$

et ensuite comparer les coefficient de y^j des deux côtés.

(VI) En déduire que $B_j^* = B_j$.

Solution : *En faisant $x = 1$ dans le point (IV) et en utilisant le point (II), on voit que le terme en $i = j$ à droite s'annule avec le terme à gauche. On a alors que*

$$\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} B_i^* = 0.$$

Maintenant remarquons que les suites $(B_i)_{i\geq 0}$ et $(B_i*)_{i\geq 0}$ satisfont la même relation de récurence et comme $B_0 = 1 = B_0^*$, les deux suites sont alors identiques.

Ramon M. Nunes - *Printemps 2017*

École Polytechnique Fédérale de Lausanne