CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1
FEUILLE 3

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Voici une solution de l'exercice 1 de la troisième feuille

Exercice 7. — *Montrer que le théorème des nombres premiers est équivalent à l'existence de la limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}-\log x\right).$$

Solution : Nous avons vu que le théorème des nombres premiers est équivalent à la formule asymptotique

$$\theta(x) := \sum_{p\leq x}\log p \sim x.$$

Supposons d'abord qu'il existe une constante c telle que

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} = \log x + c + o(1). \tag{0.1}$$

Par la formule de sommation d'Abel, nous avons

$$\theta(x) = \sum_{p<x}\log p = x\sum_{p<x}\frac{\log p}{p} - \int_2^X \sum_{p<t}\frac{\log p}{p}dt.$$

La formule (0.2) nous donne

$$x\log x + cx + o(x) - \int_2^x \log t dt + c(x-2) + \int_2^x R(t)dt,$$

où $R(t) = o(1)$. Nous vérifions facilement que pour x suffisament grand, il existe C_0 tel que l'intégrale sur t est bornée par

$$C_0\int_2^{x^{1/2}} dt + \int_{x^{1/2}}^x R(t)dt \leq C_0 x^{1/2} + \frac{\epsilon}{2}x \leq \epsilon x.$$

En combinant ces résultats, on trouve que

$$\theta(x) = x + o(x).$$

Maintenant considérons la réciproque.

(J'ai sans doute sous estimé cet exercice. Dans cette direction, il est beaucoup plus compliqué que je ne le pensais. Si vous trouvez difficile de suivre ce corrigé maintenant, vous pouvez toujours y revenir plus tard)

On suppose que le le théorème des nombres premiers est vrai. Ici sous la forme

$$m(x) := \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Notre premier but sera de prouver que la limite

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n\leq x} \left(\frac{\Lambda(n)}{n} - \frac{1}{n} \right) \tag{0.2}$$

existe. Nous commençons par considérer la fonction f donnée par

$$f(n) := \log n - \tau(n) + 2\gamma,$$

où τ est la fonction nombre de diviseurs et γ la constante d'euler, définies dans la première feuille. En utilisant l'exercice 6 de la première feuille pour la somme de τ et passage à l'integrale pour la somme de log, nous obtenons

$$\sum_{k\leq x} f(n) \ll x^{1/2}.$$

La sommation d'Abel maintenant fournit

$$E(x) := \sum_{k\leq x} \frac{f(k)}{k} = C + O\left(x^{-1/2}\right), \tag{0.3}$$

où C est donné par la série convergente

$$C := \int_1^\infty \left\{ \sum_{k\leq t} f(k) \right\} \frac{dt}{t^2}.$$

On considère les fonctions arithmétiques $\mathbf{1}$ et δ telles que $(n) = 1$ pour tout $n \geq 1$ et $\delta(1) = 1$, $\delta(n) = 0$ pour $n \geq 2$.

En s'appuyant sur les identités $\Lambda = \log * \mu$, $\mathbf{1} = \tau * \mu$ et $\delta = \mathbf{1} * \mu$, il est facile de voir que

$$\sum_{n\leq x} \left(\frac{\Lambda(n)}{n} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{dk\leq n} \frac{\mu(d)}{d} \frac{f(k)}{k} - 2\gamma. \tag{0.4}$$

Par inclusion-exclusion (methode de l'hyperbole, voir exos I.6 & III.3), on vérifie que le coté gauche de (0.4) vaut

$$\sum_{k\leq y} \frac{f(k)}{k} m\left(\frac{x}{k}\right) + \sum_{d\leq x/y} \frac{\mu(d)}{d} E\left(\frac{x}{d}\right) - E(y) m\left(\frac{x}{y}\right) - 2\gamma.$$

On utilise (0.3) pour déduire que la dernière expression vaut

$$\sum_{k\leq y} \frac{f(k)}{k} m\left(\frac{x}{k}\right) - 2\gamma + O\left(y^{-1/2}\left(1 + m\left(\frac{x}{y}\right)\right)\right).$$

En laissant d'abord x et puis y tendre vers l'infini, on obtient que la limite (0.2) existe et vaut -2γ.

On a presque fini. On note maintenant que

$$\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}=\sum_{\substack{p^j\leq x\\ j\geq 2}}\frac{\log p}{p^j}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\sum_{p}\frac{\log p}{p^2-p}<+\infty.$$

En combinant ceci avec l'existence de la limite (0.2), on prouve que la limite

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}-\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}$$

existe. On conclut maintenant facilement à partir de la formule asymptotique

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=\log x+\gamma+o(1).$$

Ramon M. Nunes - *Printemps 2017*

École Polytechnique Fédérale de Lausanne