# CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3
# FEUILLE 3

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Voici une solution de l'exercice 1 de la troisième feuille

***Exercice 3* (La Méthode de l'hyperbole de Dirichlet revisitée)**

*Soit $\tau_k(n)$ la fonction nombre de diviseurs généralisée définie pour tout entier $n \geq 1$ par*

$$\tau_k(n) := \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k = n} 1.$$

*On veut prouver la formule asymptotique*

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n) = x P_{k-1}(\log x) + O(x^{\frac{k-1}{k}} (\log x)^{k-2}), \tag{0.1}$$

*où $P_{k-1}$ est un polynôme de degré $k-1$.*

***Remarque :*** *Pour $k = 2$, nous avons déjà obtenu cette formule dans la première feuille d'exercices. Effectivement, $\tau_2 = \tau$, la fonction nombre de diviseurs définie dans la première feuille.*

*(I) Soient $g$ et $h$ deux fonctions arithmétiques. On définit*

$$G(x) := \sum_{n \leq x} g(n), \quad H(x) := \sum_{n \leq x} h(n).$$

*Montrer que pour tout $1 \leq y \leq x$, nous avons*

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \sum_{d \leq y} g(d) H\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{m \leq \frac{x}{y}} h(m) G\left(\frac{x}{m}\right) - G(y) H\left(\frac{x}{y}\right),$$

*où $f = g * h$ est la convolution de ces deux fonctions.*

***Suggestion :*** *Voir l'exercice 6 de la première feuille.*

*(II) Prouver (0.1) pour $k = 3$.*

*(III) Généraliser.*

**Solution :** Nous avons déjà vu en cours la partie $(I)$. Nous allons donc se concentrer sur les parties $(II)$ et $(III)$. En fait nous allons prouver directement le cas général. Soit $k \geq 3$. On addmettra comme hypothèse d'induction que l'on a la formule asymptotique

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k-1}(n) = x P_{k-2}(\log x) + O\left(x^{\frac{k-2}{k-1}} (\log x)^{k-3}\right), \tag{0.2}$$

où $P_{k-2}$ est un polynôme de degré $k-2$. On appliquera la formule de la partie $(I)$ avec les choix $g=1$ et $h=\tau_{k-1}$. Cela nous donne

$$\sum_{n\le x}\tau_k(n)=\sum_{d\le y}\left(\sum_{n\le x/d}\tau_{k-1}(n)\right)+\sum_{m\le x/y}\tau_{k-1}(m)\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor-\lfloor y\rfloor\left(\sum_{m\le x/y}\tau_{k-1}(m)\right)$$

En utilisant (0.2), on voit que

$$\sum_{n\le x}\tau_k(n)=x\sum_{d\le y}\frac{P_{k-2}(\log(x/d))}{d}+x\sum_{m\le x/y}\frac{\tau_{k-1}(m)}{m}-xP_{k-2}\left(\log(x/y)\right)+O\left(x^{\frac{k-2}{k-1}}y^{\frac{1}{k-1}}(\log x)^{k-3}+\frac{x}{y}(\log x)^{k-2}\right).\tag{0.3}$$

On va maintenant traiter chacun des trois termes à droite de (0.3). Le troisième terme est déjà sous une forme adéquate. On va se concentrer sur les deux autres.

**Le second terme :** Par la formule de sommation d'Abel,

$$\sum_{m\le z}\frac{\tau_{k-1}(m)}{m}=\frac{1}{z}\sum_{m\le z}\tau_{k-1}(m)+\int_1^z\left(\sum_{m\le t}\tau_{k-1}(m)\right)\frac{dt}{t^2}.$$

Maintenant, (0.2) permet de reécrire le coté droit ci-dessus comme

$$P_{k-2}(\log z)+\int_1^z P_{k-2}(\log t)\frac{dt}{t}+\int_1^z R_{k-1}(t)\frac{dt}{t^2}+O\left(z^{-\frac{1}{k-1}}(\log z)^{k-3}\right),$$

où $R_{k-1}$ satisfait $R_{k-1}(t)=O(t^{\frac{k-1}{k}}(\log t)^{k-3})$. En particulier, l'intégrale

$$C_{k-1}:=\int_1^{+\infty}R_{k-1}(t)\frac{dt}{t^2}$$

converge. On éstime alors la queue de l'intégrale. On a que

$$\int_z^{+\infty}R_{k-1}(t)\frac{dt}{t^2}\ll z^{-\frac{1}{k-1}}(\log z)^{k-3}.$$

De plus,

$$\int_1^z P_{k-2}(\log t)\frac{dt}{t}=\int_0^{\log z}P_{k-2}(u)du=\tilde{P}_{k-1}(\log z),$$

où $\tilde{P}_{k-1}$ est un polynôme de dégré $k-1$.

En combinant les résultats des dernières lignes, on obtient

$$\sum_{m\le z}\frac{\tau_{k-1}(m)}{m}=P_{k-2}(\log z)+\tilde{P}_{k-1}(\log z)+C_{k-1}+O(z^{-\frac{1}{k-1}}(\log z)^{k-3})\tag{0.4}$$

**Le premier terme :** Tout d'abord on note que pour $y\le x$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{d\le y}\frac{P_{k-2}(\log(x/d))}{d}&=\int_1^y\frac{P_{k-2}(\log(x/t))}{t^2}\lfloor t\rfloor dt+O\left(y^{-1}\log(x/y))^{k-2}\right)\\&=\int_1^y\frac{P_{k-2}(\log(x/t))}{t}dt+\int_1^y\frac{P_{k-2}(\log(x/t))}{t^2}\{t\}dt+O\left(y^{-1}(\log x)^{k-2}\right).\end{aligned}$$

Maintenant on complète la deuxième intégrale à droite ci-dessus.

$$\int_1^y \frac{P_{k-2}(\log(x/t))}{t^2}\{t\}dt = \int_1^{+\infty} \frac{P_{k-2}(\log(x/t))}{t^2}\{t\}dt + O(y^{-1}(\log x)^{k-2})$$
$$=: Q_{k-1}(\log x) + O(y^{-1}(\log x)^{k-2}),$$

où l'on voit facilement que $Q_{k-1}$ est un polynôme de degrée $k-1$.

D'après le changement de variable $t \to x/t$, on a que

$$\int_1^y P_{k-2}(\log(x/t))\frac{dt}{t} = \int_{x/y}^x P_{k-2}(\log t)\frac{dt}{t}.$$

En combinant les résultats des dernières lignes, on obtient que

$$\sum_{d\leq y} \frac{P_{k-2}(\log(x/d))}{d} = \tilde{P}_{k-1}(\log x) - \tilde{P}_{k-1}(\log(x/y)) + C + O\left(y^{-1}\log x\right)^{k-2}. \tag{0.5}$$

On remplace maintenant les formules (0.4) et (0.5) avec $z = x/y$ dans (0.3), obtenant ainsi

$$\sum_{n\leq x} \tau_k(n) = xP_{k-1}(\log x) + O\left(x^{\frac{k-2}{k-1}}y^{\frac{1}{k-1}}(\log x)^{k-3} + \frac{x}{y}(\log x)^{k-2}\right),$$

où $P_{k-1}(.) := \tilde{P}_{k-1}(.) + Q_{k-1}(.) + C_k$ est un polynôme de dégré $k-1$. Le résultat suit maintenant en posant $y = x^{\frac{1}{k}}$.

---

Ramon M. Nunes - *Printemps 2017*

École Polytechnique Fédérale de Lausanne