THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
FEUILLE D'EXERCICES 1

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Exercice 1. — *On définit par récurrence les fonctions* $\log_1 x = \log x$ *et* $\log_{k+1} x = \log \log_k x$*. Soit* $0 < \epsilon < 1$ *un nombre réel. Soient les fonctions*

$$f_1(x) = x^{\epsilon},\ \ f_2(x) = \log_2 x,\ \ f_3(x) = \log_5 x,\ \ f_4(x) = e^{\sqrt{\log x}},$$

$$f_5(x) = e^{\frac{1}{\log_2 x}},\ \ f_6(x) = x^2+1,\ \ f_7(x) = e^{e^{x}},\ \ f_8(x) = \lfloor x \rfloor,$$

$$f_9(x) = x^x,\ \ f_{10}(x) = e^{\frac{\log_3 x}{\log_4 x}},\ \ f_{11}(x) = \frac{x}{\log x},\ \ f_{12}(x) = x^{1+\frac{1}{x}},\ \ f_{13}(x) = x\log_2 x.$$

Déterminer une permutation σ *de l'ensemble* $\{1,2,\ldots,13\}$ *telle que pour tout* $i,j \in \{1,2,\ldots,13\}$, $\sigma(i) < \sigma(j) \Rightarrow f_i(x) = o(f_j(x))$ *ou* $f_i(x) \sim f_j(x)$.

Exercice 2. — *Soient* $f, g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *deux fonctions telles que,*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

(a) Prouver que si on a $f(x) \sim g(x)$*, alors on a aussi* $\log f(x) \sim \log g(x)$.
(b) Est-il vrai que si on a $f(x) \sim g(x)$*, alors on a aussi* $e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$ *?*

Exercice 3. — *(a) Prouver que pour tout* $\alpha \geq 0$*, nous avons la formule asymptotique*

$$\sum_{n\leq x} n^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^{\alpha}).$$

(b) Prouver que pour tout $\alpha \geq 0$*, nous avons la formule asymptotique*

$$\sum_{n\leq x} n^{\alpha}\log n = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\log x - \frac{1}{\alpha+1}\right) + O(x^{\alpha}\log x).$$

(c) Prouver que pour tout $\alpha < -1$*, nous avons*

$$\sum_{n>x} n^{\alpha} \ll x^{\alpha+1}.$$

Exercice 4. — *Soit* $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{C}$ *une fonction pour laquelle il existe une constante* $A \neq 0$ *telle que* $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} f(n) = A$. *Prouver que*

$$\sum_{n\leq x} f(n) \log n = A(1+o(1))x \log x$$

Exercice 5. — *Un nombre* $n \geq 1$ *est dit sans facteur carré si on ne peut pas écrire* n *sous la forme* $n = \ell^2 m$ *avec* $\ell > 1$. *On note* $\mathbf{1}_{sqf}$ *la fonction caractéristique des entiers sans facteur carré.*

(a) Prouver que

$$\mathbf{1}_{sqf} = \mu^2(n),$$

où, μ *est la fonction de Möbius vue en cours.*

(b) Prouver que

$$\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d)$$

(c) En déduire que

$$\sum_{n\leq x} \mu^2(n) = cx + O(\sqrt{x}),$$

où $c = \sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k^2}$.

***Exercice 6* (La Méthode de l'hyperbole de Dirichlet)**

Pour tout entier strictement positif n, *on note* $\tau(n)$ *le nombre de diviseurs positifs de* n. *On veut prouver la formule asymptotique*

$$\sum_{n\leq x} \tau(n) = x(\log x + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}),$$

ou γ *est la constante d'Euler donnée par*

$$\gamma := 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt.$$

(I) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

(II) Montrer que pour tout $1 \leq y \leq x$, *nous avons*

$$\sum_{n\leq x} \tau(n) = \sum_{d\leq y} \sum_{m\leq \frac{x}{d}} 1 + \sum_{m\leq \frac{x}{y}} \sum_{d\leq \frac{x}{m}} 1 - \sum_{d\leq y} \sum_{m\leq \frac{x}{y}} 1.$$

(III) Conclure.

***Exercice 7* (Nombres de Bernoulli).** — *La suite de Bernoulli* $(B_i)_{i\geq 0}$ *est définie à partir de l'égalité suivante*

$$\sum_{i\geq 0} B_i \frac{y^i}{i!} = \frac{y}{e^y - 1},$$

et pour chaque $i \geq 0$ le polynôme de Bernoulli $B_i(x)$ est le seul polynôme de degré i tel que

$$\int_x^{x+1} B_i(t)dt = x^i.$$

En particulier, $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, etc.

(I) Prouver que pour tout $j > 1$ impair, on a $B_j = 0$.

(II) Prouver que pour tout $j > 1$ on a que $B_j(0) = B_j(1)$.

(III) Prouver que pour tout $j \geq 1$, $B_j'(x) = jB_{j-1}(x)$.

(IV) Posons $B_j^* := B_j(0)$. Prouver que

$$B_j(x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} B_i^* x^{j-i}.$$

(V) Prouver que pour tout $j > 1$,

$$\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} B_i = 0$$

(VI) En déduire que $B_j^* = B_j$.

***Exercice 8* (Formule d'Euler-MacLaurin).** — *Le but de cet exercice est de démontrer la formule d'Euler MacLaurin :*

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = \int_M^N f(t)dt + \frac{1}{2}\left(f(M) + f(N)\right) + \frac{B_2}{2!} f'(x)\Big|_M^N + \frac{B_4}{4!} f'''(x)\Big|_M^N$$
$$+ \ldots + \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x)\Big|_M^N - \frac{1}{(2k)!}\int_M^N B_{2k}(\{t\}) f^{(2k)}(t)dt,$$

où f est une fonction de classe C^k sur $[M, N]$

(I) Prouver la Formule d'Euler-MacLaurin de degré 1 :

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = \int_M^N f(t)dt + \frac{1}{2}\left(f(M) + f(N)\right) + \int_M^N B_1(\{t\}) f'(t)dt.$$

(II) En déduire que

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = \int_M^N f(t)dt + \frac{1}{2}\left(f(M) + f(N)\right) + \frac{B_2}{2!} f'(x)\Big|_M^N - \frac{1}{2!}\int_M^N B_2(\{t\}) f''(t)dt.$$

(III) Itérer le processus pour obtenir

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = \int_M^N f(t)dt + \frac{1}{2}\left(f(M) + f(N)\right) + \frac{B_2}{2!} f'(x)\Big|_M^N - \frac{B_3}{3!} f''(x)\Big|_M^N$$
$$+ \ldots + (-1)^k \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_M^N + \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_M^N B_k(\{t\}) f^{(k)}(t)dt.$$

(IV) Conclure à partir de l'exercice précédent.

Exercice 9. — *L'objectif de cet exercice est de prouver la formule de Stirling, i.e.*

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

On considère la suite u_n donné par

$$u_n := \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$$

(I) *Prouver que la suite $(u_n)_n$ satisfait les inégalités*

$$0 < \log u_n - \log u_{n+1} \ll \frac{1}{(n+1)^2},$$

Suggestion: *utiliser le développement*

$$-\log(1-x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$$

avec $x = \frac{1}{n+1}$.

(II) *En déduire que la suite $\log u_n$ est convergente.*
Notons c sa limite. Nous venons de prouver que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}} = e^c.$$

(III) *On admettra l'exactitude de la limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2.4\ldots(2n)}{1.3\ldots(2n-1)} = \sqrt{\pi}.$$

Vérifier que cela est équivalent à l'affirmation suivante :

$$\frac{(2^n n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\pi}.$$

(IV) *Calculer $\frac{u_n^2}{u_{n+1}}$ et conclure.*

Ramon M. Nunes - *Printemps 2017*
École Polytechnique Fédérale de Lausanne