THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
FEUILLE D'EXERCICES 2

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Exercice 1. — *Montrer qu'il n'existe pas de polynômes P et Q tels que*

$$\pi(n) = \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ pour une infinité d'entiers positifs } n.$$

Exercice 2. — *Le but de cet exercice est de prouver le troisième théorème de Mertens :*

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right).$$

(I) Prouver que la série $\sum_p \left(\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right)$ *est convergente.*

(II) Notons c_1 la limite ci-dessus. Montrer que

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-c}}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right),$$

où $c = \beta - c_1$ et β est la constante dans la formule asymptotique

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \log\log x + \beta + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

(III) Il s'agit maintenant de prouver que $\gamma = \beta - c_1$. Pour $\alpha > 0$, on considère

$$c(1+\alpha) = \sum_p \left(\log\left(1-\frac{1}{p^{1+\alpha}}\right)+\frac{1}{p^{1+\alpha}}\right).$$

Montrer que

$$c(1+\alpha) = -\log\zeta(1+\alpha) + \sum_p \frac{1}{p^{1+\alpha}},$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann donnée par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}, \quad (\mathrm{Re}(s) > 1).$$

(IV) Montrer que,

$$\log\zeta(1+\alpha) \underset{\alpha\to 0}{=} \log(1/\alpha) + O(\alpha).$$

(V) Montrer que

$$\sum_p \frac{1}{p^{1+\alpha}} \underset{\alpha\to 0}{=} \alpha \int_1^\infty \frac{\log\log x+\beta}{x^{1+\alpha}}dx + O(\alpha\log(1/\alpha)).$$

(VI) En utilisant que $\log\log n = \sum_{n<x}\frac{1}{n} - \gamma + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$*, déduire que*

$$\sum_p \frac{1}{p^{1+\alpha}} \underset{\alpha\to 0}{=} (\beta-\gamma) + \alpha \int_1^\infty \frac{\sum_{n<\log x}\frac{1}{n}}{x^{1+\alpha}}dx + O(\alpha\log(1/\alpha)).$$

(VII) Montrer que

$$\alpha \int_1^\infty \frac{\sum_{n<\log x}\frac{1}{n}}{x^{1+\alpha}}dx \underset{\alpha\to 0}{=} -\log(1-e^{-\alpha}).$$

et en déduire que

$$c(1+\alpha) \underset{\alpha\to 0}{=} (\beta-\gamma) - \log\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right) + O(\alpha\log(1/\alpha)).$$

(VIII) Faire $\alpha\to 0$ *et conclure.*

Exercice 3. — *Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert* $U\subset\mathbb{C}$ *convergeant vers une fonction* f*, uniformément sur tous les compacts de* U*. Montrer que la fonction* f *est holomorphe.*

Exercice 4. — *On admetra le théorème d'analyse complexe suivant:*

Théorème. — *Soit* $U\subset\mathbb{C}$ *un ouvert et* $a<b$ *des réels. Soit* $g: U\times[a,b]\to\mathbb{C}$ *une fonction continue telle que pour tout* $u\in[a,b]$*, la fonction* $s\mapsto g(s,u)$ *est holomorphe. Alors, la fonction*

$$s\mapsto \int_a^b g(s,u)du$$

est holomorphe.

Montrer que la fonction

$$f(s) := \int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du$$

est holomorphe sur $\{s\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s)>0\}$.

***Exercice 5* (Formule sommatoire de Poisson)**. — *Soit* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *la classe des fonctions de Schwartz, i.e.*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{f\in C^\infty(\mathbb{R}), f^{(k)}(x) \ll_{k,\ell} (1+|x|)^{-\ell}, k,\ell\geq 0\right\}.$$

Pour une fonction $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$*, on définit sa transformée de Fourier* $\hat{f}$ *par*

$$\hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ixy}dy.$$

Nous allons maintenant démontrer la formule

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

(I) Vérifier que la fonction F donnée par

$$F(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$$

pour $x \in \mathbb{R}$ est bien définie et périodique de période 1.

(II) Calculer les coefficients de fourier de F et conclure.

***Exercice 6* (Sur la fonction thêta).** — *Soit θ la fonction définie pour $x > 0$ par*

$$\theta(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}.$$

Prouver que θ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\theta\left(\frac{1}{x}\right),$$

pour tout $x > 0$.

(I) Pour $x > 0$ fixé, calculer la transformée de Fourier de la fonction f_x définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$f_x(t) := e^{-\pi x t^2}.$$

(II) Conclure en utilisant la formule de Poisson.

***Exercice 7* (La fonction zêta de Riemann).** — *Soit ζ la fonction de Riemann, définie pour $\Re(s) > 1$ par*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Dans cet exercise, nous allons prouver que ζ admet une continuation méromorphe à $\mathbb{C}$, avec un seul pôle en $s = 1$, d'ordre 1 et résidu égal à 1.

De plus, nous allons prouvr que ζ vérifie l'équation fonctionelle

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.

(I) Prover que lorsque $\Re(s) > 1$, on a

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{s/2-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}\right)dx.$$

(II) Utiliser l'exercice 6 pour prouver que, lorsque $\Re(s) > 1$, on a

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty}\left(x^{-(s+1)/2} + x^{s/2-1}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}\right)dx.$$

(III) Conclure.

***Exercice 8*.** — *Dans cet exercice nous allons calculer les valeurs de la fonction ζ aux entier positifs pairs et aux entiers négatifs.*

(I) Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ fixé, prouver que pour $t \in [0, \pi]$, on a

$$\cos zt = \frac{\sin \pi z}{\pi}\left(\frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2}\cos nt\right).$$

Suggestion : *Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $2\pi-$périodique ϕ_z définie pour $t \in]-\pi, \pi]$ par $\phi_z(t) = \cos zt$.*

(II) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, on a

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2}.$$

(III) Prouver que pour $n \geq 1$, on a

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}.$$

En déduire que pour $n \geq 0$, on a

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}.$$

Suggestion : *Utiliser l'égalité*

$$iy\cot(iy/2) = \left(y + \frac{2y}{e^y - 1}\right).$$

Exercice 9 **(La convolution de fonctions arithmétiques)**

Soient g_1, g_2 deux fonctions arithmétiques et notons $g_1 * g_2$ leur convolution, i.e. la fonction aithmétique définie pour $n \geq 1$ par

$$(g_1 * g_2)(n) := \sum_{d|n} g_1(d)g_2\left(\frac{n}{d}\right).$$

Pour $i \in \{1, 2\}$, soit

$$G_i(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_i(n)}{n^s}$$

la série de Dirichlet associée à g_i. Supposons qu'il existe $\sigma > 0$ tel que les séries G_1 et G_2 convergent absolument pour $\Re(s) > \sigma$.

(I) Prouver que pour $\Re(s) > \sigma$, nous avons l'égalité

$$G_1(s)G_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(g_1 * g_2)(n)}{n^s}.$$

(II) Pour α, $\beta \in \mathbb{R}$, on considère la fonction arithmétique $\tau_{\alpha,\beta}$ donnée par

$$\tau_{\alpha,\beta}(N) := \sum_{d|n} d^{\alpha}\left(\frac{n}{d}\right)^{\beta}.$$

Soit $D_{\alpha,\beta}(s)$ la série de Dirichlet associée à $d_{\alpha,\beta}$. Montrer que, pour $\Re(s) > 1 + \max(\alpha, \beta)$, la série $D_{\alpha,\beta}$ est convergente et nous avons l'égalité

$$D_{\alpha,\beta}(s) = \zeta(s-\alpha)\zeta(s-\beta).$$

Exercice 10. — *Soit $g \neq 0$ une fonction arithmétique. Admettons qu'il existe $\sigma > 0$ tel que la série de Dirichlet G associée à g converge absolument pour $\Re(s) > \sigma$.*

(I) Montrer que si g est multiplicative, alors pour $\Re(s) > \sigma$, nous avons l'égalité

$$G(s) = \prod_p \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{g(p^i)}{p^{is}} \right).$$

(II) Prouver que si g est completemment multiplicative alors pour $\Re(s) > \sigma$,

$$G(s) = \prod_p \left(1 - \frac{g(p)}{p^s} \right)^{-1}.$$

(III) Montrer que pour $\Re(s) > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}.$$

En déduire que pour $\Re(s) > 1$,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Ramon M. Nunes - *Printemps 2017*
École Polytechnique Fédérale de Lausanne