THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
FEUILLE D'EXERCICES 3

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Exercice 1. — *Montrer que le théorème des nombres premiers est équivalent à l'existence de la limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}-\log x\right).$$

Exercice 2. — *On rappelle les définitions suivantes :*

$$\psi(x):=\sum_{n\leq x}\Lambda(n);\quad \pi(x):=\sum_{p\leq x}1.$$

Soit $E:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ *une fonction telle que* $E(x)(\log x)^{-2}$ *est croissante est satisfait* $E(x)\gg x^{1/2}(\log x)^2$. *Montrer que la formule asymptotique*

$$\psi(x)=x+O(E(x))$$

implique la formule asymptotique

$$\pi(x)=\mathrm{Li}(x)+O\left(\frac{E(x)}{\log x}\right),$$

où $\mathrm{Li}(x):=\int_2^x\frac{dt}{\log t}$.
Remarque : *L'hypothèse de Riemann dit que ces formules asymptotiques sont valables avec* $E(x)=x^{1/2}(\log x)^2$.

Exercice 3 **(La Méthode de l'hyperbole de Dirichlet revisitée)**
Soit $\tau_k(n)$ *la fonction nombre de diviseurs généralisée définie pour tout entier* $n\geq 1$ *par*

$$\tau_k(n):=\sum_{n_1n_2\dots n_k=n}1.$$

On veut prouver la formule asymptotique

$$\sum_{n\leq x}\tau_k(n)=xP_{k-1}(\log x)+O(x^{\frac{k-1}{k}}),\tag{0.1}$$

où P_{k-1} *est un polynôme de degré* $k-1$.

Remarque : *Pour $k = 2$, nous avons déjà obtenu cette formule dans la première feuille d'exercices. Effectivement, $\tau_2 = \tau$, la fonction nombre de diviseurs définie dans la première feuille.*

(I) Soient g et h deux fonctions arithmétiques. On définit

$$G(x) := \sum_{n \leq x} g(n), \quad H(x) := \sum_{n \leq x} h(n).$$

Montrer que pour tout $1 \leq y \leq x$, nous avons

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \sum_{d \leq y} g(d) H\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{m \leq \frac{x}{y}} h(m) G\left(\frac{x}{m}\right) - G(y) H\left(\frac{x}{y}\right),$$

où $f = g * h$ est la convolution de ces deux fonctions.

Suggestion : *Voir l'exercice 6 de la première feuille.*

(II) Prouver (0.1) pour $k = 3$.

(III) Généraliser.

Exercice 4. — *Montrer que*

$$\omega(n) = O\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right),$$

où $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n comptés sans multiplicité.

Exercice 5. — *Soit $\omega(n)$ comme dans l'exercice précédent. Montrer que*

$$\sum_{n \leq x} \omega(n) = x(\log \log x + \beta) + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

où β est la constante dans le deuxième théorème de Mertens.

Exercice 6. — *Montrer la formule asymptotique suivante :*

$$L_k(x) := \sum_{p_1 \ldots p_k \leq x} \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_k} \sim (\log \log x)^k,$$

où les p_i sont des nombres premiers.

Suggestion : *Utiliser les inégalités*

$$\left(\sum_{p < x^{1/k}} \frac{1}{p}\right)^k \leq L_k(x) \leq \left(\sum_{p < x} \frac{1}{p}\right)^k$$

Exercice 7. — *On dit qu'un nombre entier n est un nombre presque-premier si n est a au plus deux facteurs premiers comptés avec multiplicité. Le but de cet exercice est de montrer la formule asymptotique suivante pour les nombre $\pi_2(x)$ d'entiers presque-premiers inférieurs ou égaux à x:*

$$\pi_2(x) \sim \frac{x \log \log x}{\log x}. \tag{0.2}$$

(I) Montrer que

$$\pi_2(x) = \frac{1}{2} \sum_{p_1 p_2 \leq x} 1 + O(x^{1/2}).$$

(II) Déduire que

$$\pi_2(x) = \sum_{p < x^{1/2}} \pi\left(\frac{x}{p}\right) + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

(III) Utiliser le théorème des nombres premiers pour voir que

$$\pi_2(x) = x \sum_{p < x^{1/2}} \frac{1}{p \log(x/p)} + o\left(\frac{x \log\log x}{\log x}\right)$$

(IV) Déduire que le premier terme à droite ci-dessus vaut

$$\frac{x}{\log x} \sum_{p < x^{1/2}} \frac{1}{p} + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

(V) Conclure.

Exercice 8. — *Dans cet exercice, on va montrer la formule asymptotique*

$$\sum_{n \leq x} \tau(n)^2 \sim \frac{x(\log x)^3}{6\zeta(2)^2},$$

pour une certaine constante $A > 0$.

(I) Montrer que

$$\sum_{n \leq x} \tau(n)^2 = \sum_{d_1, d_2 \leq x} \left\lfloor \frac{x}{[d_1, d_2]} \right\rfloor,$$

où $[d_1, d_2]$ *est le PPCM de* d_1 *et* d_2.

(II) En utilisant la formule d'inversion de Möbius, montrer que

$$\sum_{n \leq x} \tau(n)^2 = \sum_{f_0 f_1 f_2 < x} \sum_{f \leq \frac{x^{1/2}}{(f_0 f_1 f_2)^{1/2}}} \left(\frac{\mu(f) x}{f^2 f_0 f_1 f_2} + O(1)\right).$$

(III) En déduire que

$$\sum_{n \leq x} \tau(n)^2 = \zeta(2)^{-1} \sum_{f_0 f_1 f_2 < x} \frac{x}{f_0 f_1 f_2} + O(x(\log x)^2).$$

(IV) En utilisant que $\log(x/f) = \int_f^x \frac{dt}{t}$, *prouver que*

$$\sum_{n \leq x} \tau(n)^2 = \frac{x(\log x)^3}{6\zeta(2)} + O(x(\log x)^2).$$

RAMON M. NUNES - *Printemps 2017*

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE