THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES
FEUILLE D'EXERCICES 4

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Définition. — *Soit χ un caractère de Dirichlet modulo q. On dit que χ est primitif s'il n'existe pas un entier q_1 tel que $q_1 \mid q$ et un caractère de Dirichlet χ_1 tel que*

$$\chi(n) = \chi_1(n), \quad (n,q) = 1.$$

Exercice 1. — *Soit $q \geq 1$ un nombre entier et soit χ un caractère non trivial modulo q. Soient $H, N \geq 1$. Le but de cet exercice est de prouver l'inégalité de Polya-Vinogradov :*

$$\sum_{n=N+1}^{N+H} \chi(n) \ll q^{1/2} \log q.$$

(I) Prouver qu'il suffit de considérer le cas où χ est un caractère primitif.

(II) Montrer que

$$\sum_{n=N+1}^{N+H} \chi(n) = \frac{1}{q} \sum_{m \pmod q} \tau_\chi(m) \left\{ \sum_{n=N+1}^{N+H} e\left(\frac{-mn}{q}\right) \right\}$$

où

$$\tau_\chi(n) := \sum_{a \pmod q} \chi(a) e\left(\frac{an}{q}\right),$$

et $e(x) = e^{2\pi i x}$.

(III) Montrer que si χ est un caractère primitif modulo q, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\tau_\chi(n) = \tau_\chi(1)\overline{\chi(n)}.$$

(IV) Montrer que si χ est un caractère primitif modulo q, alors on a l'égalité

$$|\tau_\chi(1)|^2 = q$$

Suggestion : *Utiliser le point précédent.*

(V) Montrer que

$$\sum_{n=N+1}^{N+H} e(\alpha n) \leq \min\left(\frac{2}{\|\alpha\|}, H\right).$$

(VI) Conclure.

Exercice 2. — *Soit q un nombre entier strictement positif. On dit que $m \in \mathbb{Z}$ est un résidu quadratique modulo q si m est premier avec q et de plus, il existe un entier ℓ tel que $\ell^2 \equiv m \pmod q$. On définit le symbole de Legendre de $\left(\frac{m}{q}\right)$ de la manière suivante :*

$$\left(\frac{m}{q}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } m \text{ est un résidu quadratique modulo } q, \\ -1 \text{ si } (m,q)=1, \text{ mais } m \text{ n'est pas un résidu quadratique modulo } q, \\ 0 \text{ si } (m,q) > 1. \end{cases}$$

(I) Montrer que pour q un nombre premier, $m \to \left(\frac{m}{q}\right)$ définit un caractère de Dirichlet modulo q.

(II) Soit q un nombre premier, montrer que le plus petit entier $m \geq 1$ tel que m n'est pas un résidu quadratique modulo q est $\ll q^{1/2} \log q$.

Exercice 3. — *Dans cet exercice on va prouver un résultat d'analyse complexe généralisant le théorème de Newman vu en cours. Nous montrerons le*

Théorème. — *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que $|a_n| \leq \Lambda(n)$ pour $n \geq 2$. Alors la série*

$$F(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}.$$

converge vers une fonction analytique sur le demi-plan ouvert $\{s \in \mathbb{C},\, \Re(s) > 1\}$. Si par ailleurs F s'étend de manière analytique sur un ouvert contenant le demi-plan fermé $\{s \in \mathbb{C},\, \Re(s) \geq 1\}$, alors la série converge vers $F(s)$ pour tout s avec $\Re(s) \geq 1$.

(I) En utilisant la preuve du Théorème 1 du Chapitre IV, prouver que nous pouvons remplacer la condition $|a_n| \leq 1$ par la condition

$$(H_\epsilon) : \begin{cases} \displaystyle\sum_{n\leq N} a_n n^{x-1} \ll \epsilon N^x + \frac{N^x}{x}, \\ \displaystyle\sum_{n>N} \frac{a_n}{n^{x+1}} \ll \frac{\epsilon}{N^x} + \frac{1}{xN^x}. \end{cases}$$

pour tout $\epsilon > 0$.

(II) En utilisant le Théorème des nombres premiers, prouver que si $|a_n| \leq \Lambda(n)$, alors pour tout $\epsilon > 0$, la condition (H_ϵ) est satisfaite.

Exercice 4. — *Soit $q \geq 1$ et χ un caractère de Dirichlet non trivial modulo q. On considère $L(\chi, s)$ la fonction L associée à χ, définie pour $\Re(s) > 1$ par*

$$L(\chi, s) := \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Le but de cet exercice est de prouver que $L(\chi, s) \neq 0$ pour $\Re(s) = 1$. Cela généralise le résultat de Dirichlet vu en cours selon lequel $L(\chi, 1) \neq 0$.

(I) Soit $\zeta_q(s)$ la fonction définie pour $\Re(s) > 1$ par

$$\zeta_q(s) := \prod_{\chi \pmod q} L(\chi, s).$$

On définit les coefficients $a_q(n)$ et $\Lambda_q(n)$ par les égalités

$$\zeta_q(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_q(n)}{n^s}, \quad -\frac{\zeta_q'(s)}{\zeta_q(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_q(n)}{n^s} \quad (\Re(s) > 1).$$

Calculer $\Lambda_q(n)$ et vérifier que $\Lambda_q(n) \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

(II) Soit $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. On considère $H_{q,it}(s)$ la fonction définie pour $\Re(s) > 1$ par

$$H_{q,it}(s) := \zeta_q(s)^3(\zeta_q(s+it)\zeta_q(s-it))^2\zeta_q(s+2it)\zeta_q(s-2it).$$

On définit les coefficients $\Lambda_{q,it}(n)$ par l'égalité

$$-\frac{H_{q,it}'(s)}{H_{q,it}(s)} =: \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_{q,it}(n)}{n^s} \quad (\Re(s) > 1).$$

Prouver que ces deux fonctions s'étendent de manière analytique sur un ouvert contenant le demi-plan fermé $\{s \in \mathbb{C}, \Re(s) \geq 1\}$, et que $\Lambda_{q,it}(n) \geq 0$.

(III) On supposera qu'il existe un caractère de Dirichlet χ tel que $L(1+it,\chi) = 0$ pour un certain $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. vérifier que $a_q(n) \in \mathbb{R}$ pour tout $n \geq 1$, et déduire que $H_{q,it}(1) = 0$. Prouver aussi que $-H_{q,it}'(s)/H_{q,it}(s)$ a un pôle simple en $s = 1$ et que

$$\operatorname{res}_{s=1}\left(-\frac{H_{q,it}'(s)}{H_{q,it}(s)}\right) < 0.$$

(IV) Trouver une contradiction en étudiant le développement de Laurent de $-H_{q,it}'(s)/H_{q,it}(s)$ au point 1. Conclure.

Exercice 5. — *Soit $q \geq 1$ et $a \in \mathbb{Z}$ premier avec q. On considère*

$$\psi(x;q,a) := \sum_{\substack{n\leq x \\ n=a \pmod q}} \Lambda(n).$$

Le but de cet exercice est de prouver la formule asymptotique

$$\psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)}(1+o_q(1)).$$

(I) Pour tout caractère de Dirichlet non trivial χ modulo q, appliquer l'exercice 3 à la fonction $-\frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)}$ pour prouver que la limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n}$$

existe.

(II) En déduire que pour tout caractère de Dirichlet non trivial χ modulo q, on a

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n)\chi(n) = o(x).$$

(III) Utiliser le théorème des nombres premiers et l'ortogonalité des caractères pour démontrer que

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \pmod q}} \Lambda(n) \sim \frac{x}{\varphi(q)}.$$

(IV) Montrer que

$$\pi(x;q,a) := \#\{p \leq x;\ p \equiv a \pmod{q}\} \sim \frac{\pi(x)}{\varphi(q)}.$$

Ramon M. Nunes - *Printemps 2017*
École Polytechnique Fédérale de Lausanne