UNIL - Faculté des géosciences et de l'environnement - Automne 2009
Cours de Mathématiques I **M. Troyanov**
Exercices corrigés, série 2 25 septembre 2009

Les calculs de cette feuille peuvent se faire à la machine

1. a) Définir les notions de suite géométrique et de suite arithmétique !
   b) Quelle est la différence entre une suite et une série ?

   Solution : (a) Une suite est *arithmétique* si sa variation est constante. Une suite arithmétique est toujours de la forme $x_n = a \cdot n + b$ (où a est la variation et $b = x_0$ est le premier terme).

   Une suite est *géométrique* si sa variation est proportionnelle à elle même : $\Delta x_n = a \cdot x_n$. Une telle suite est toujours de la forme $x_n = c \cdot q^n$, où $q = (a+1)$ et $c = x_0$ est le premier terme).

   (b) Une *série* est une suite de nombres obtenue en sommant une suite donnée. On dit que $\{s_n\}$ est la *série associée* à la suite $\{x_n\}$ si $s_n = \sum_{k=0}^n x_k = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$.
   La formule de sommation dit que toute suite coïncide avec la série associée à sa variation (à une constante près).

2. Que vaut la somme des $x_k = 11 + 3 \cdot k$, pour k variant de 0 à 200 ?

$$\sum_{k=0}^{200}(11 + 3 \cdot k) = 11 + 14 + 17 + 20 + \cdots + 611 = ?$$

   Solution : D'après l'exercice 1.7, on a $\sum_{k=0}^n (a \cdot k + b) = a \cdot T_n + b(n+1)$ où T_n est le $n$ème nombre triangulaire, $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{200}(11 + 3 \cdot k) = 3 \cdot T_{200} + 11 \cdot 201 = \frac{3}{2} \cdot 200 \cdot 201 + 11 \cdot 201 = 62511$$

3. a) On investit 9000 Kychypus à un taux de 4%. Quelle est notre fortune au bout de 21 ans ?

   b) Même question en supposant qu'on ajoute une annuité de 1000 Kychypus ?

   Solution : (a) Au bout de 21 ans, le capital est de $9000 \cdot (1 + 4\%)^{21} = 9000 \cdot (1.04)^{21} = 20508.9$ Kychypus.

   (b) En ajoutant un investissement annuel de $D = 1000$ Kychypus (dès la seconde année), on obtient un capital de

$$C_n = C_0 \cdot q^n + D \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

   après n années où $q = (1 + 4\%)$ (voir le cours). Donc

$$C_{21} = 9000 \cdot (1.04)^{21} + 1000 \cdot \frac{(1.04)^{21} - 1}{0.04} = 52'478.10.$$

4. Une légende affirme que le jeu d'échecs a été inventé par un savant indien Sissa ben Daher. Quand l'empereur Sheram apprit que l'inventeur était l'un de ses sujets, il le fit mander au palais. - Sois remercié pour ce jeu qui égaie le soir de ma vie. Quelle récompense souhaites-tu ?

   Sissa répondit *que me soit remis un grain de riz pour la première case de l'échiquier, puis 2 grains de riz pour la 2ème case puis 4 pour la 3ème 8 pour la 4ème , 16 pour la 5ème et ainsi de suite jusqu'à la 64ème case en doublant le nombre de grains à chaque fois.*

   On connaît la suite : le royaume ne contient pas assez de riz pour exaucer le voeu de Sissa.

   En supposant qu'un grain de riz pèse en moyenne 0.03 grammes, déterminer le nombre d'années de production mondiale (actuelle) nécessaires pour réunir les grains de riz demandés par Sissa à l'empereur.

   Solution : Le nombre total de grains de riz que Sissa demande comme récompense est

$$1 + 2 + 4 + 16 + 32 + 64 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

on approximera ce nombre par 1.845×10^{19}.

Cela fait une masse totale de $0.03 \cdot 1.845 \times 10^{19} = 5.535 \times 10^{17}$ grammes, c'est à dire 5.535×10^{11} tonnes de riz (car une tonne = 1000 kg = 10^6 grammes).

Pour résoudre notre problème, il faut connaître la production mondiale annuelle de riz. Faisons confiance à wikipédia qui affirme que "en 2008, la production mondiale de riz s'est élevée à 661 millions de tonnes", soit 6.61×10^8 tonnes de riz. Le cadeau de Sissa correspond donc à

$$\frac{5.535 \times 10^{11}}{6.61 \times 10^8} = 837.37 \text{ années.}$$

C'est plus de 837 ans de production mondiale actuelle !

5. a) Une tonne de boue est constituée de 60% d'eau. Après quelques jours de soleil bien chaud, cette boue devient de la terre ne contenant plus que 20% d'eau. Quelle en est le poids total ?

   Solution : La réponse est 500 kg.
   Notre tonne de boue est constituée de 600 kg d'eau et 400 kg de terre "sèche". Après ensoleillement, nous avons une terre humide contenant 20% d'eau et toujours 400 kg de terre sèche. Cette terre représente donc 80% du nouveau mélange, qui pèse donc au total

$$\frac{400}{80\%} = \frac{400}{0.8} = 500 \text{ kg.}$$

   b) Dans le même esprit, on admet que les concombres sont composés à 99% d'eau. On laisse reposer une tonne de concombres pendant une nuit. Quel est le poids des concombres le lendemain matin sachant qu'ils ne contiennent plus que 98% d'eau.

   Solution : La réponse est de nouveau 500 kg et le raisonnement est le même
   Nos concombres sont constitués de 990 kg d'eau et 10 kg de matière sèche. Le lendemain, nous avons des concombres contenant 98% d'eau et toujours 10 kg de matière sèche. Cette matière sèche représente donc 2% du poids total qui est donc égal à

$$\frac{10}{2\%} = \frac{10}{0.02} = 500 \text{ kg.}$$

6. Développer les expressions suivantes :
   (a) $(a+b)^8$,
   (b) $(a-b)^8$,
   (c) $(3a-b)^5$,
   (d) $(x^2+2y)^3$.

   Pour ce problème, on utilise la *formule du binôme de Newton*, qui dit que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^0 a^n b^0,$$

   les coefficients C_n^k se lisent sur le triangle de Pascal. Par exemple $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

   Solution : On trouve
   (a) $(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$,
   (b) $(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$,
   (c) $(3a-b)^5 = 243a^5 - 405a^4b + 270a^3b^2 - 90a^2b^3 + 15ab^4 - b^5$,
   (d) $(x^2+2y)^3 = x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3$.

7. La façon la plus rapide de calculer C_n^k n'est en général pas d'utiliser la formule $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ ni d'utiliser le triangle de Pascal. Il vaut mieux utiliser la formule

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

Expliquer pourquoi cette formule est vraie et pourquoi elle peut être intéressante dans les calculs.

Utiliser cette formule pour calculer C_{21}^3.

Solution : Il suffit de relire le cours. Nous avons expliqué la formule $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ en partant du constat que $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$ et en rappelant que $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Mais on avait d'abord montré que $A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)$. Donc

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Par exemple

$$C_{21}^3 = \frac{21\cdot 20\cdot 19}{3!} = \frac{7980}{6} = 1330.$$

(si on calcule à la main, on a intérêt à faire des simplifications : $\frac{21\cdot20\cdot19}{3!} = \frac{21\cdot20\cdot19}{3\cdot2} = 7\cdot10\cdot19 = 1330$).