Chapitre 3

Intégrales et primitives

3.1 Définitions

Soit $f(x)$ une fonction continue définie sur l'intervalle $[a, b]$. L'*intégrale* de f sur l'intervalle $[a, b]$ est un nombre réel noté

$$\int_a^b f(x)dx,$$

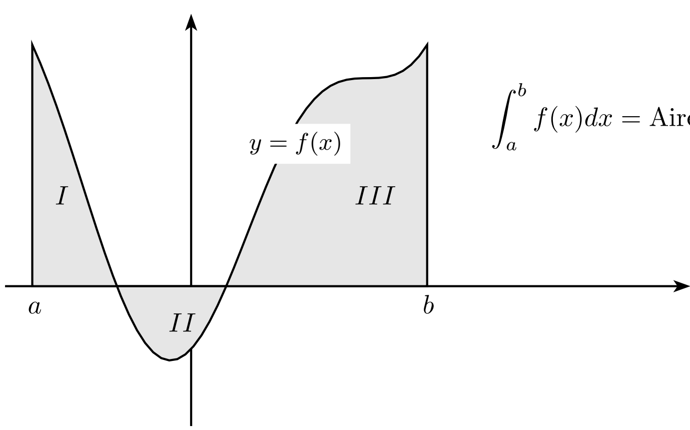
qui est défini de la façon suivante :

a) Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors l'intégrale est égale à l'aire limitée par l'axe $= x$, par les droites verticales $\{x = a\}$ et $\{x = b\}$ et par la courbe $\{y = f(x)\}$.

b) Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors l'intégrale est égale à $(-1)\times$(l'aire limitée par l'axe $= x$, par les droites $\{x = a\}$ et $\{x = b\}$ et par la courbe $\{y = f(x)\}$).

c) Si f change de signe, on partage l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles où f est de signe constant et on fait la somme des aires correspondantes avec les signes $+$ et $-$.

En bref : l'intégrale de f sur un intervalle est l'*aire algébrique* délimitée par cet intervalle et la courbe $\{y = f(x)\}$.



$$\int_a^b f(x)dx = \text{Aire}(I) - \text{Aire}(II \\ +\text{Aire}(III)$$

Remarques 1. Le signe $\int$ représente un 's' allongé. Nous verrons plus bas qu'une intégrale est une limite de somme, ou somme généralisée. Ce qui justifie la notation.

2. La variable x dans la notation $\int_a^b f(x)dx$ de l'intégrale joue un "rôle muet". On peut la remplacer par une autre variable sans changer la valeur de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(s)ds = \int_a^b f(t)dt$$

3. L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ n'a proprement été définie que si $a \leq b$. Si $b < a$, on admet la convention suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3.2 Sommes de Riemann

Soit $f(x)$ une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$. Subdivisons cet intervalle en ajoutant des points

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b.$$

On note

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,$$

c'est l'*accroissement* de x dans la subdivision considérée de l'intervalle. On suppose que l'accroissement est petit, disons

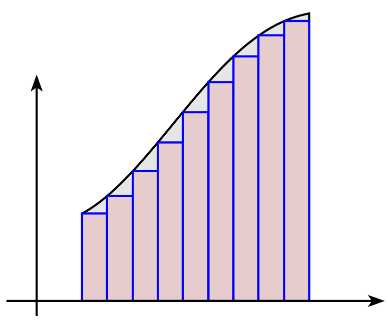
$$\Delta x_i \leq \delta$$

pour un petit nombre δ qu'on appelle la *taille* de la subdivision.

Definition 3.1 La somme

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i)\Delta x_i &= f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \cdots + f(x_{m-1})\Delta x_{m-1} \\ &= f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{m-1})(x_m - x_{m-1}) \end{aligned}$$

s'appelle la *somme de Riemann* de f sur l'intervalle $[a, b]$.



On observe que la somme de Riemann est une approximation de l'intégrale de la fonction. Si l'on raffine la subdivion de l'intervalle $[a, b]$ de façon que sa taille δ converge vers zero, alors cette approximation devient une égalité :

Théorème 3.1 *La somme de Riemann converge vers l'intégrale de f lorsque δ tend vers 0 :*

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\sum_{i=0}^{m-1} f(x_i)\Delta x_i \right) = \int_a^b f(x)dx.$$

Maintenant nous comprenons pourquoi l'intégrale est une limite de somme. Le symbole dx dans la notation $\int_a^b f(x)dx$ est présent comme un rappel que nous devons multiplier $f(x_i)$ par l'accroissement Δx_i dans la somme de Riemann (on pense alors à dx comme un accroissement infiniment petit (ou 'accroissement infinitésimal" de x).

3.2.1 Propriétés de l'intégrale

Voyons une liste des propriétés de l'intégrale :

Propriétés de l'intégrale :

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Si $f = k$ est constante, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b k\,dx = k \cdot (b-a)$.

Si $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.

Si $A \leq f(x) \leq B$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\displaystyle A \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq B \cdot (b-a)$.

Si $c \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

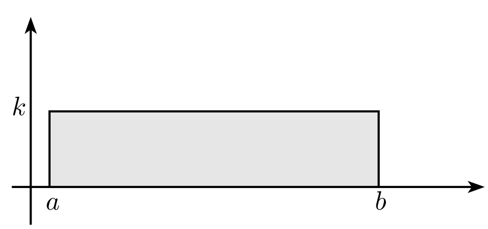
Si k est constante, alors $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

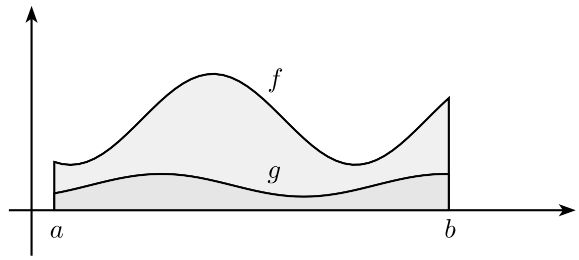
Les cinq premières propriétés se démontrent à partir de la définition de l'intégrale comme aire algébrique limitée par la courbe $y = f(x)$. Les deux dernières propriétés se démontrent en utilisant les sommes de Riemann.

• La première propriété dit que $\int_a^a f(x)dx = 0$. C'est évident car cette intégrale représente l'aire d'un rectangle de largeur nulle, et donc cette aire est nulle.

• Si $f = k$ est une constante, alors l'intégrale $\int_a^b k\,dx$ représente l'aire d'un rectangle de hauteur k et largeur $(b-a)$. On a donc $\int_a^b k\,dx = k \cdot (b-a)$, ce qui prouve la seconde propriété.

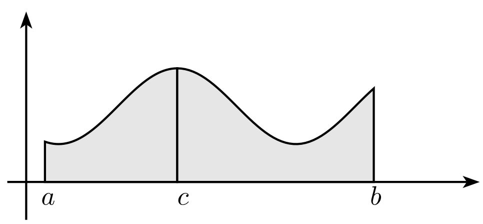


• La figure suivante explique la troisième propriété : $\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$ si $g(x) \le f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$:



• La quatrième propriété dit que si $A \le f(x) \le B$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $A \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le B \cdot (b-a)$. C'est clairement une conséquence des seconde et troisième propriétés.

• La figure suivante explique la cinquième propriété : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.



• La sixième propriété se démontre avec les sommes de Riemann. Si $\{x_j\}$ est une subdivision de l'intervalle $[a,b]$, alors on a

$$(k \cdot f)(x_0)\Delta x_0 + \cdots + (k \cdot f)(x_{m-1})\Delta x_{m-1} = k \cdot \big(f(x_0)\Delta x_0 + \cdots + f(x_{m-1})\Delta x_{m-1}\big),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{m-1} (k \cdot f)(x_i)\Delta x_i = k \cdot \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i)\Delta x_i.$$

En passant à la limite lorsque $\delta = \max\{\Delta x_i\}$ tend vers 0, on obtient

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=0}^{m-1} (k \cdot f)(x_i)\Delta x_i = \lim_{\delta \to 0} k \cdot \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i)\Delta x_i = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

• La preuve de la septième propriété est semblable : on a

$$\sum_{i=0}^{m-1} (f+g)(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i)\Delta x_i + \sum_{i=0}^{m-1} g(x_i)\Delta x_i.$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x)+g(x))dx &= \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=0}^{m-1}(f+g)(x_i)\Delta x_i \\
&= \lim_{\delta\to 0}\left(\sum_{i=0}^{m-1} f(x_i)\Delta x_i + \sum_{i=0}^{m-1} g(x_i)\Delta x_i.\right) \\
&= \lim_{\delta\to 0}\left(\sum_{i=0}^{m-1} f(x_i)\Delta x_i\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(\sum_{i=0}^{m-1} g(x_i)\Delta x_i.\right) \\
&= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

3.2.2 Le théorème de la moyenne

Definition 3.2 La moyenne d'une fonction continue f sur l'intervalle $[a,b]$ est définie par

$$\text{Moyenne de } f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Observer que

i.) Si $f = k$ est constante, alors la moyenne de f est àgale à k.

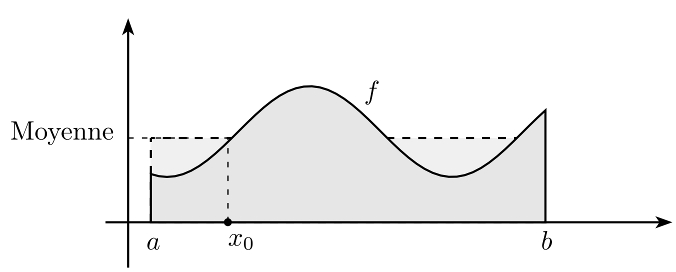
ii.) Si $A \leq f(x) \leq B$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$A \leq \text{Moyenne de} f \leq B.$$

Théorème 3.2 (Théorème de la moyenne) *Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors il existe un point $x_0 \in [a,b]$ tel que*

$$f(x_0) = \textit{Moyenne de } f.$$

Remarque ce point n'est pas forcément unique !



3.3 La formule de Newton-Leibniz

3.3.1 Primitive d'une fonction

Définition. Soit $f(x)$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Une *primitive* de f est une nouvelle fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$F' = f.$$

La recherche d'une primitive est donc l'opération inverse de la dérivation.

Exemple. La fonction $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$ est une primitive de $f(x) = x$. En effet, il suffit de dériver F pour le vérifier :

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 5\right)' = x.$$

On remarque que rien n'aurait été changé si on avait choisit $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ ou $\frac{1}{2}x^2 - 2$. Ce fait est tout-à-fait général :

Lemme 3.3 *Une primitive d'une fonction n'est définie qu'à une constante additive près. Si* $F_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est une primitive de* f *et* c *est une constante, alors* $F_2(x) = F_1(x) + c$ *est une autre primitive de la même fonction* f.

Preuve. La preuve est très facile, on a

$$F_2'(x) = (F_1(x) + c)' = F_1'(x) + c' = f(x)$$

car la dérivée c' d'une constante c est nulle.

□

La réciproque de cette proposition est aussi vraie, lorsqu'on connaît une primitive F d'une fonction f, on obtient toutes les autres primitives en ajoutant simplement une constante arbitraire à F.

Pour fabriquer une table de primitive, il suffit de prendre nos fonctions familières et de les dériver. Une table de primitives n'est donc rien d'autre qu'une table de dérivation "lue à l'envers".

Quelques primitives :

Fonction	Primitive	Remarque
$f(x) = k$	$F(x) = k \cdot x + C$	k et C sont constantes.
$f(x) = x^a$	$F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 1$.
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + C$	$x > 0$.
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$	x en radians.
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$	x en radians.
$(f(x) + g(x))$	$(F(x) + G(x)) + C$	$F' = f$ et $G' = g$.
$\lambda \cdot f(x)$	$\lambda \cdot F(x) + C$	$F' = f$.
$f(g(x)) \cdot g'(x)$	$F(g(x)) + C$	$F' = f$.

Remarque. Une primitive d'une fonction f s'appelle aussi une *intégrale indéfinie* de f, mais cette terminologie présente plus d'inconvénient que d'avantages.

3.3.2 Théorème fondamental du calcul intégral.

Le théorème suivant nous dit que pour calculer l'intégrale d'une fonction f, il suffit de trouver une primitive.

Théorème 3.4 (Théorème fondamental du calcul intégral.) *Soit F une primitive quelconque de la fonction continue $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$. Alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ est donnée par*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Remarque. La formule énoncée dans ce théorème s'appelle la *formule de Leibniz-Newton.*

Il y a un lien étroit entre cette formule et la formule de sommation pour les suites. Pour comprendre ce lien il faut raisonner avec les sommes de Riemann.
Donnons-nous une fonction dérivable $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ et choisissons une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$. de l'intervalle $[a, b]$. Notons $y_k = F(x_k)$ et écrivons la formule de sommation pour la suite des y_k :

$$F(b) - F(a) = y_m - y_0 = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta y_k,$$

Or la formule de l'approximation linéaire nous dit que

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k) \cong F'(x_{k+1}) \cdot (x_{k+1} - x_k) = f(x_{k+1}) \cdot \Delta x_k$$

Donc

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta y_k = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_{k+1}) \cdot \Delta x_k$$

Il s'agit d'une somme de Riemann qui va converger vers l'intégrale de f lorsque la taille δ de la subdivision tend vers 0. On obtient donc au final une égalité et non pas une approximation :

$$F(b) - F(a) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{m-1} f(x_{k+1}) \cdot \Delta x_k \cong \int_a^b f(x)dx.$$

Il faut considérer que l'argument précédent est un argument heuristique. Il explique la formule de Newton-Leibniz, mais ça n'est pas une preuve rigoureuse car il y a trop d'approximations dans cet argument et le passage à la limite serait difficile (pas impossible, mais techniquement difficile) à justifier.

Nous allons donc voir une autre preuve de la formule de Newton-Leibniz en faisant un détour par la construction d'une primitive particulière d'une fonction donnée à partir de son intégrale. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, on peut considérer l'intégrale de f sur le sous-intervalle $[a, x]$. Cela nous définit une nouvelle fonction que nous notons

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

La proposition suivante nous dit que cette la dérivée de cette fonction n'est autre que la fonction f.

Proposition 3.5 *La fonction $\Phi(x)$ est une primitive de f :*

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Démonstration. Rappelons que par définition :

$$\Phi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x + h) - \Phi(x)}{h}.$$

Nous avons par définition $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, et en utilisant l'une des propriétés de l'intégrale, on a

$$\Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dtx = \Phi(x) + \int_x^{x+h} f(t)dtx$$

et donc

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)dtx.$$

Nous faisons maintenant appel au théorème de la moyenne. Il nous dit dans la situation présente qu'il existe un nombre x_0 entre x et $x+h$ tel que

$$f(x_0) = \text{Moyenne de } f \text{ sur } [x, x+h]$$

Or

$$\text{Moyenne de } f \text{ sur } [x, x+h] \; = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dtx}{(x+h)-x} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dtx$$

Nous avons donc montré qu'il existe x_0 entre x et $x+h$ tel que

$$f(x_0) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dtx = \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h}.$$

Si l'on fait tendre h vers 0, alors x_0 va tendre vers x et comme f est continue, nous trouvons que

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \Phi'(x).$$

□

Voici une conséquence importante du théorème fondamental.

Corollaire 3.6 *(A) Soit g une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$. Alors g est constante si et seulement si sa dérivée est nulle.*

(B) Soient F_1 et F_2 deux primitives d'une même fonction continue g. Alors il existe une constante c telle que

$$F_2(x) = F_1(x) + c$$

pour tout x dans l'intervalle $[a, b]$.

Preuve. (A) On sait déjà que si g est constante, alors $g'(x) = 0$ pour tout x. Réciproquement,

Démonstration rigoureuse de la formule de Newton-Leiniz Soit F une primitive quelconque de f. Comme $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est aussi une primitive, les deux fonctions diffèrent d'une constante : $F(x) = \Phi(x) + c$. Nous avons donc

$$F(b) - F(a) = (\Phi(b) + c) - (\Phi(a) + c) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt.$$

Or $\int_a^a f(t)dt = 0$, donc

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

□

3.4 Méthodes d'intégration

Pour dériver une fonction, même compliquée, il suffit d'appliquer les règles du calcul différentiel. Pour calculer une intégrale, il n'y a pas de recette universelle et il faut quelquefois un peu d'habileté. Il y a tout de même quelques méthodes :

A. Méthode directe

Lorsqu'on trouve une primitive d'une fonction f dans une table, ou qu'elle se déduit des tables à partir de quelques calculs algébriques, il n'y a rien d'autre à faire : L'intégrale est donnée par la Formule de Newton-Leibniz.

Exemple Soit à calculer l'intégrale $\int_0^{\pi/2}(e^{2x}+\sin(x))dx$.

- On sait qu'une primitive de e^x est e^x, donc une primitive de e^{2x} est $\frac{1}{2}e^{2x}$.
- On sait qu'une primitive de $\sin(x)$ est $-\cos(x)$.
- Et on sait qu'une primitive d'une somme est donnée par la somme des primitives.

Donc la fonction $(e^{2x}+\sin(x))$ admet $(\frac{1}{2}e^{2x}-\cos(x))$ comme primitive et

$$\int_0^{\pi/2}(e^{2x}+\sin(x))dx = \left(\frac{1}{2}e^{2\frac{\pi}{2}}-\cos(\frac{\pi}{2})\right)-\left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 0}-\cos(0)\right)=\frac{1}{2}(e^\pi-e)+1.$$

B. Intégration par substitution

Cette méthode est basée sur la formule

$$\int_{x=a}^{b} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{y=g(a)}^{f(b)} f(y)\,dy = F(g(b))-F(g(a))$$

où F est une primitive de f.

Preuve. Choisissons une primitive $F(y)$ de la fonction $f(y)$. Puis posons $H(x)=F\circ g(x)=F(g(x))$. Alors la règle de dérivation des fonctions composées nous dit que

$$H'(x)=(F(g(x))'=f(g(x))\cdot g'(x)$$

La formule de Leibniz-Newton entraîne alors que

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = H(b)-H(a)=F(g(b))-F(g(a)).$$

□

Remarque. Cette méthode s'appelle *intégration par substitution*, car pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$, on *substitue* (i.e. on remplace) la variable x par une variable $y=g(x)$. Notons qu'il faut alors substituer les bornes d'intégration $x=a$ et $x=b$ par $y=g(a)$ et $y=g(b)$ et remplacer $g'(x)\,dx$ par dy.

Exemple 1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{ax+b}\cdot a\,dx$.

Solution : On intègre par substitution. On doit trouver une primitive de $h(x)=\sqrt{ax+b}$, on pose pour cela $g(x)=ax+b$ et $f(y)=\sqrt{y}=y^{1/2}$. Alors $g'(x)=a$ et une primitive de $f(y)$ est

$$F(y)=\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{y^3}.$$

En résumé

$$g(x)=ax+b,\quad g'(x)=a,\qquad f(y)=\sqrt{y},\quad F(y)=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}.$$

Donc une primitive de

$$h(x)=f(g(x))\cdot g'(x)=\sqrt{ax+b}\cdot a$$

est donnée par $H(x)=F(g(x))=\frac{2}{3}(ax+b)^{\frac{3}{2}}$. On peut maintenant calculer notre intégrale, on a

$$\int_0^1\sqrt{ax+b}\cdot a\,dx = H(1)-H(0)=\frac{2}{3}\left((a+b)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right).$$

Exemple 2. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} 2x\cos(x^2)\cdot dx$.

Solution : On voit que la fonction à intégrer $h(x) = \cos(x^2)\cdot(2x)$ est de la forme $h(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$ où $g(x) = x^2$ (donc $g'(x) = 2x$) et $f(y) = \cos(y)$.
La formule de substitution nous dit alors que

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x\cos(x^2)\cdot dx = \int_{g(0)}^{g(\sqrt{\pi/2})} F(y)dy = F(g(\sqrt{\pi/2})) - F(g(0))$$

où F est une primitive de $f(y) = \cos(y)$. On prend $F(y) = \sin(y)$, et on obtient donc

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x\cos(x^2)\cdot dx = \sin(g(\sqrt{\pi/2})) - \sin(g(0)) = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1.$$

Voici une application importante de l'intégration par substitution au cas où on dilate la variable d'intégration :

Proposition 3.7 (Formule de dilatation) *Pour tout nombre $\lambda \neq 0$, on a*

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(\lambda x)\,dx$$

Preuve. Posons $g(x) = \lambda x$, alors $g'(x) = \lambda$ et nous avons donc

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_a^b f(\lambda x)\cdot\lambda\,dx = \lambda\cdot\int_a^b f(\lambda x)\,dx.$$

Mais d'autre part, la formule d'intégration par substitution dit que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy = \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(y)\,dy,$$

donc

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(y)\,dy = \lambda\cdot\int_a^b f(\lambda x)\,dx.$$

□

Un cas particulièrement important de cette formule est l'identité suivante :

$$\int_{\lambda}^{\lambda u} x^n dx = \lambda^{n+1}\int_1^u x^n dx.$$

En posant $n = -1$, nous voyons en particulier que l'intégrale de la fonction $\frac{1}{x}$ ne change pas si on dilate l'intervalle d'intégration.

$$\int_{\lambda}^{\lambda u}\frac{dx}{x} = \int_1^u \frac{dx}{x}.$$

C. Intégration par parties

Cette méthode est basée sur la formule

$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = (f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a)) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx}$$

Preuve On utilise la règle de Leibniz qui dit que $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g$. Cette règle entraîne que

$$\begin{aligned}(f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)) &= \int_a^b (f(x) \cdot g(x))' \, dx \\ &= \int_a^b (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) \, dx \\ &= \int_a^b (f'(x) \cdot g(x)) \, dx + \int_a^b (f(x) \cdot g'(x)) \, dx.\end{aligned}$$

$\square$

Exemple Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx$.

Solution : Par parties : On pose $f(x) = x$ et $g'(x) = \cos(x)$. Alors $f'(x) = 1$ et $g(x) = \sin(x)$. On a donc

$$\int_0^{\pi/2} f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_{x=0}^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} f'(x) \cdot g(x) dx,$$

c'est à dire

$$\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) dx = (x \cdot \sin(x)) \Big|_{x=0}^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) dx = (x \cdot \sin(x)) \Big|_{x=0}^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx \\ = \frac{\pi}{2} - (-\cos(x)) \Big|_{x=0}^{\pi/2} &= \frac{\pi}{2} - \Big(-\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(0)\Big) \\ = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$