0.1 Formule du binôme de Newton

Les nombre C_n^k s'appellent aussi les *coefficients binomiaux*, et on les notes

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Ils apparaissent dans le développement du binôme $(x+y)^n$ (d'où leur appellation).

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Théorème 0.1 *Pour tous nombres réels $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Preuve Considérons d'abord les s valeurs $n = 0, 1, 2, 3$. Pour $n = 0$, on a

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0.$$

Pour $n = 1$, elle dit que

$$(x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1,$$

et pour $n = 2$ elle dit que

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2.$$

Jusqu'ici, la formule de Newton est donc évidente. Passons $n = 3$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y) \\
&= x^3 + x^2 y + xy^2 + xyx + yx^2 + y^2 x + yxy + y^3 \\
&= x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3 \\
&= \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3.
\end{aligned}$$

D'une manière générale, le développement de

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y) \cdot (x+y) \cdot \cdots \cdot (x+y)}_{n \text{ termes}} \tag{*}$$

est une somme de monômes de type $x^p \cdot y^q$ où $p + q = n$, Combien de monôme de ce type y a -t-il ? La réponse est que pour obtenir le monôme $x^p \cdot y^q$, nous devons choisir q fois le terme y et $p = (n - q)$ fois le terme x dans le produit (*). Il y a donc $C_n^p = \binom{n}{p}$ choix possibles et nous avons donc

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^q + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

$\square$

0.2 Limite des suites

Dans ce paragraphe, nous étudions la notion importante de *limite* d'une suite. Voyons d'abord quelques définitions préliminaires :

Définitions 1.) On dit que la suite $\{x_k\}$ est *croissante* si $x_k \leq x_{k+1}$ pour tout k (et si $x_k \leq x_{k+1}$, on dit que la suite est *strictement croissante*).
2.) La suite $\{x_k\}$ est *décroissante* si $x_k \geq x_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3.) La suite $\{x_k\}$ est *monotone*, si elle est ou bien croissante, ou bien décroissante.
4.) La suite est *bornée* si il existe deux constantes M et M' telles que

$$M \leq x_k \leq M'$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque Pour prouver qu'une suite est croissante, on peut calculer sa variation et prouver qu'elle est positive pour tout k. En effet, $x_k \leq x_{k+1}$ signifie que $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \geq 0$.

Définitions : • On dit que la suite $\{x_k\}$ *converge* vers le nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ et on note

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre m tel que si $k \geq m$, alors $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$, c'est à dire :

$$-\epsilon \leq x_k - \alpha \leq +\epsilon.$$

• On dit aussi que la suite *diverge vers l'infini* et on note

$$\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty$$

si pour tout $N > 0$ il existe un nombre m tel que si $k \geq m$, alors $x_k \geq N$.

Exemples de bases

a) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$

b) si $a > 0$, alors $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k^a} = \lim\limits_{k\to\infty} k^{-a} = 0$

c) si $a > 0$, alors $\lim\limits_{k\to\infty} k^a = \infty$

d) si $q > 1$, alors $\lim\limits_{k\to\infty} q^k = \infty$

e) si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{k\to\infty} q^k = 0$

Bien que ces limites soient très intuitives, elles peuvent être délicates à prouver. Démontrons par exemple les convergences (a) et (d).
(a) Pour prouver que $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$, on imagine qu'on a fixé $\epsilon > 0$ quelconque. Choisissons pour $m \in \mathbb{N}$ le plus petit entier qui est supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$. Alors $m \geq \frac{1}{\epsilon}$ et donc $\frac{1}{k} \leq \epsilon$ dès que $k \geq m$. On donc

$$k \geq m \implies \left|\frac{1}{k}\right| < \epsilon$$

et ceci entraîne que $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$.
(d) Pour prouver que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ si $q > 1$, on peut écrire $q = 1+a$ avec $a > 0$. La formule du binôme entraîne que

$$q^n = (1+a)^n = 1 + n \cdot a + \frac{n \cdot (n-1)}{2} a^2 + \cdots \geq 1 + n \cdot a.$$

Fixons $N > 0$ et choisissons pour entier m, le plus petit entier supérieur à N/a. On a alors grâce à l'inégalité précédente :

$$n \geq m \implies n \cdot a \geq N \implies q^n \geq N.$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Propriétés importantes des limites
Supposons que $\{x_k\}$et $\{y_k\}$ sont deux suites convergentes. Notons $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ et $\beta = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$, Alors

1) $\lim_{k\to\infty} (x_k + y_k) = \alpha + \beta$

2) $\lim_{k\to\infty} (a \cdot x_k) = a \cdot \alpha$ (où a est une constante).

3) $\lim_{k\to\infty} (x_k \cdot y_k) = \alpha \cdot \beta$.

4) si $\beta \neq 0$, alors on a $\lim_{k\to\infty} \left(\dfrac{x_k}{y_k}\right) = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

5) si $x_k \leq y_k$ pour tout k, alors $\alpha \leq \beta$

On peut synthétiser les deux premières règles en une seule :

$$\lim_{k\to\infty} (a \cdot x_k + b \cdot y_k) = a \cdot \left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) + b \cdot \left(\lim_{k\to\infty} y_k\right) = a \cdot \alpha + b \cdot \beta$$

(on dit que l'opération de "passage à la limite" est linéaire).

Propriétés avec une suite bornée

6) Si $\lim_{k\to\infty} y_k = 0$ et $\{x_k\}$ est une suite bornée, alors $\lim_{k\to\infty} x_k \cdot y_k = 0$.

7) Si $\lim_{k\to\infty} y_k = +\infty$ et $\{x_k\}$ est une suite bornée, alors $\lim_{k\to\infty} \dfrac{x_k}{y_k} = 0$.

Propriétés des limites infinies

8) Si $\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty$ et si $y_k \geq x_k$, alors $\lim_{k\to\infty} y_k = +\infty$.

9) Si $\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty$, alors $\lim_{k\to\infty} \dfrac{1}{x_k} = 0$.

10) Si $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ et $x_k \geq 0$ pour tout k, alors $\lim_{k\to\infty} \dfrac{1}{x_k} = +\infty$.

11) Si $\lim_{k\to\infty} y_k = +\infty$ et $\{x_k\}$ est une suite bornée, alors $\lim_{k\to\infty} (x_k + y_k) = \infty$.

L'exemple suivant illustre comment utiliser ces règles.

Problème : Trouver la limite

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{2k+1}{3k-2}\right)$$

On voit grâce à la propriété (11) que $\lim_{k\to\infty} 2k+1 = +\infty$ et $\lim_{k\to\infty} 2k+1 = +\infty$ et que $\lim_{k\to\infty} 3k-2 = +\infty$. On voudrait utiliser la propriété (4), mais on ne peut pas car

$$\frac{\lim_{k\to\infty} (2k+1)}{\lim_{k\to\infty} (3k-2)} \text{ est de la forme } \frac{\infty}{\infty} \text{ qui est non déterminé.}$$

Pour lever l'ambiguïté, on commence par faire un peu d'algèbre. On remarque que

$$\frac{2k+1}{3k-2} = \frac{2+\frac{1}{k}}{3-\frac{2}{k}},$$

(on a divisé le numérateur et le diviseur de la fraction par k). On a en outre $\lim_{k\to\infty} (2+\frac{1}{k}) = 2 + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 2$ et $\lim_{k\to\infty} (3-\frac{2}{k}) = 3$. Finalement, on trouve

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{2k+1}{3k-2}\right) = \frac{\lim_{k\to\infty} (2+\dfrac{1}{k})}{\lim_{k\to\infty} (3-\dfrac{2}{k})} = \frac{2}{3}.$$

Voici un autre exemple :

Problème : Trouver la limite

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k^2+1}{k^3+3}\right).$$

Nous avons de nouveau $\lim_{k\to\infty}(k^2+1)=+\infty$ et $\lim_{k\to\infty}(k^3+3)=+\infty$, il faut donc ramener la fraction à une autre forme algébrique. Divisons le numérateur et le dénominateur par k^2, alors

$$\left(\frac{k^2+1}{k^3+3}\right)=\left(\frac{1+\frac{1}{k^2}}{k+\frac{3}{k^2}}\right)$$

La suite $(1+\frac{1}{k^2})$ est bornée (elle est comprise entre 1 et 2), et la suite $(k+\frac{3}{k^2})$ tend vers l'infini en vertu de la règle (11). La règle (7) entraîne donc que

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k^2+1}{k^3+3}\right)=0.$$

Pour prouver les règles (1) à (11), il faut utiliser le définition de la convergence. A titre d'exemple, démontrons la règle (7) : Si $\lim\limits_{k\to\infty} y_k=+\infty$ et $\{x_k\}$ est une suite bornée, alors $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_k}{y_k}=0$.

Nous devons montrer que pour tout $\epsilon>0$, il existe N tel que si $k\geq n$, alors $\left|\frac{x_k}{y_k}\right|<\epsilon$. Or on sait par hypothèse que $\{x_k\}$ est une suite bornée, donc il existe M tel que $|x_k|\leq M$ pour tout k. On sait aussi que $\lim\limits_{k\to\infty} y_k=+\infty$, ce qui veut dire que pour tout nombre $L>0$, il existe N tel que si $k\geq n$, alors $y_k\geq L$.
Choisissons $L=\dfrac{M}{\epsilon}$, alors dès que $k\geq N$, on a

$$y_k\geq L=\frac{M}{\epsilon}\geq\frac{|x_k|}{\epsilon}.$$

Donc $\dfrac{|x_k|}{|y_k|}\leq\epsilon$ dès que $k\geq N$, ce qui signifie que $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_k}{y_k}=0$.

Séries infinies Rappelons que si $\{x_k\}$ est une suite, la série associée est une nouvelle suite $\{s_n\}$ définie par $s_n=\sum_{k=0}^n x_k$. Il se peut que cette série converge, disons vers un nombre α Dans ce cas, on dit que α est la limite de la série complète (ou de la série infinie) associée à $\{x_k\}$ et on note

$$\sum_{k=0}^{\infty}x_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x_k=\alpha=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x_k.$$

Exercice Prouver que si $|q|<1$, alors la série associée converge et

$$\sum_{k=0}^{\infty}a\cdot q^k=\frac{a}{1-q}$$

Nous terminons ce chapitre en énonçant deux théorèmes utiles pour décider si une suite converge, même lorsqu'on ne sais pas déterminer sa limite.

Théorème 0.2 *Si la suite $\{x_k\}$ est monotone et bornée, alors elle converge.*

Théorème 0.3 *Supposons que $\{x_k\}$ $\{y_k\}$ et $\{z_k\}$ soient trois suites telles que*

$$y_k\leq x_k\leq z_k$$

pour tout entier k. Supposons aussi que $\{y_k\}$ et $\{z_k\}$ convergent vers une même limite α :

$$\lim_{k\to\infty}y_k=\lim_{k\to\infty}z_k=\alpha.$$

Alors $\{x_k\}$ convergent aussi vers α :

$$\lim_{k\to\infty}x_k=\alpha.$$