Université de LAUSANNE

Formulaire Mathématiques II
pour les Géosciences

Notations possibles des coordonnées dans $\mathbf{R}^n$

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ \vec{x} = (x, y)\ n = 2,\ \vec{x} = (x, y, z)\ n = 3$$

On note le produit scalaire

$$\vec{x}.\vec{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

1. Gradient

$$n = 2,\ \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}))$$

$$n = 3,\ \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}))$$

$$n \text{ quelconque } \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}))$$

2. Formules d'approximation

On note $\vec{x}_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})$ et $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ et on pose

$$\|\vec{h}\| = (h_1^2 + h_2^2 + \ldots, h_n^2)^{1/2}.$$

On note ε une fonction sur $\mathbf{R}^n$ telle que

$$\varepsilon(\vec{h}) \to 0 \text{ quand } \|\vec{h}\| \to 0.$$

2.1. **Formule d'approximation linéaire.**

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0).(x_1 - x_{0,1}) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0).(x_n - x_{0,n}) + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \varepsilon(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ &= f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0).(\vec{x} - \vec{x}_0) + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \varepsilon(\vec{x} - \vec{x}_0) \end{aligned}$$

Ecrivant $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{h}$ avec $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_0 + \vec{h}) &= f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0).h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) h_n + \|\vec{h}\| \varepsilon(\vec{h}) \\ &= f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0).\vec{h} + \|\vec{h}\| \varepsilon(\vec{h}) \end{aligned}$$

2.2. **Formule d'approximation quadratique ($n = 2$).** Ecrivons

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0),\ (x, y) = \vec{x}_0 + \vec{h} = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0).h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0).h_2 \\ &+ \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\vec{x}_0).h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0).h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\vec{x}_0).h_2^2\Big) + (h_1^2 + h_2^2)\varepsilon(\vec{h}) \end{aligned}$$

En particulier si $\vec{x}_0$ est un point critique, c.a.d. si

$$\nabla f(\vec{x}_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)) = \vec{0},$$

la formule devient

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(\vec{x}_0 + \vec{h}) &= f(\vec{x}_0) + \frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(\vec{x}_0).h_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(\vec{x}_0).h_1 h_2 + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} f(\vec{x}_0).h_2^2 + \|(h_1, h_2)\|^2 \varepsilon(\vec{h}) \\ &= f(\vec{x}_0) + a h_1^2 + b h_1 h_2 + c h_2^2 + \|(h_1, h_2)\|^2 \varepsilon(\vec{h}) \end{aligned}$$

3. **Equation du plan tangent**

3.1. ***Au graphe de f.*** Dans les coordonnées de $\mathbf{R}^{n+1}$, notées

$$(\vec{x}, z) = (x_1, \dots, x_n, z),$$

l'équation du plan tangent au point $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0)) = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}, z_0)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0).(x_1 - x_{0,1}) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0), (x_n - x_{0,n}) - (z - f(\vec{x}_0)) = 0$$

ou encore

$$\nabla f(\vec{x}_0).(\vec{x} - \vec{x}_0) - (z - f(\vec{x}_0)) = 0$$

3.2. ***Vecteur normal au plan tangent.***

$$\vec{n}(\vec{x}_0, z_0) = (\nabla f(\vec{x}_0), -1) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0), -1)$$

3.3. ***A la variété de niveau d'équation $f(\vec{x}) = C$ dans $\mathbf{R}^n$.*** Dans les coordonnées de $\mathbf{R}^n$, notées

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n),$$

l'équation du plan tangent au point $\vec{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$ est (quand $\nabla f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0).(x_1 - x_{0,1}) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0).(x_n - x_{0,n}) = 0$$

ou encore

$$\nabla f(\vec{x}_0).(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

3.4. ***Vecteur normal au plan tangent.*** Quand $\nabla f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$, le vecteur normal est donné par le gradient

$$\vec{n}(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0))$$

4. Hessien

Soit $n = 2$, on pose

$$a = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(\vec{x}_0),\ b = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(\vec{x}_0),\ c = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 y} f(\vec{x}_0)$$

$$\mathrm{Hess}(f)(\vec{x}_0) = b^2 - 4ac = \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0)\big)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\vec{x}_0)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\vec{x}_0)$$

4.1. **Extrema locaux.** Supposons que $\vec{x}_0$ est un point critique.

– Si $\mathrm{Hess}(f)(\vec{x}_0) < 0 \implies$ on a un extremum local. Si $a > 0$ (resp. $a < 0$) c'est un minimum local (resp. un maximum local).

– Si $\mathrm{Hess}(f)(\vec{x}_0) > 0 \implies$ on a point selle. Quand $a \neq 0$, les droites isotropes sont alors données en terme des racines du polynôme

$$P(X) = aX^2 + bX + c.$$

Soient X_+, X_- les deux racines réelles (distinctes) de $P(X)$ (son discriminant Δ est justement $\mathrm{Hess}(f)(\vec{x}_0)$), les droites isotropes ont pour équation

$$h_1 - X_+ h_2 = (x - x_0) - X_+(y - y_0) = 0,\ h_1 - X_- h_2 = (x - x_0) - X_-(y - y_0) = 0.$$

Quand $a = 0$ les droites isotropes ont pour équation

$$bh_1 + ch_2 = b(x - x_0) + c(y - y_0) = 0,\ h_2 = y - y_0 = 0.$$

– Si $\mathrm{Hess}(f)(\vec{x}_0) = 0 \implies$ on a unpoint dégénéré et on doit se débrouiller.

5. Courbes paramétrées – Champs de vecteurs

5.1. **Vecteur vitesse.** Si

$$\varphi : t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

désigne une courbe paramétrée, son *vecteur vitesse* en t (ou vecteur dérivé, ou vecteur tangent à la courbe) est le vecteur

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

5.2. **Formule d'approximation linéaire.** Quand $h \to 0$

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + h\varphi'(t) + h\vec{\varepsilon}(h), \quad \|\vec{\varepsilon}(h)\| \to 0,\ h \to 0.$$

5.3. **Longueur d'une courbe paramétrée.** Si $\varphi : [a,b] \mapsto \mathbf{R}^3$ est une courbe paramétrée, sa longueur est

$$\ell(\varphi([a,b])) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

5.4. **Travail d'un champ le long d'une courbe $\varphi(t)$.** Dans ce document les coordonnées d'un champ de vecteur sont notées

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)).$$

Soit $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une courbe paramétrée et $\mathcal{C} = \varphi([a,b])$ la courbe géométrique associée ; on a

$$\begin{aligned} T(\vec{F}, \varphi([a,b])) = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} d\varphi &= \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)).\varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b F_1(\varphi(t))x'(t) + F_2(\varphi(t))y'(t) + F_3(\varphi(t))z'(t) dt \end{aligned}$$

On a pour $a \le b \le c$

$$T(\vec{F}, \varphi([a,c])) = T(\vec{F}, \varphi([a,b])) + T(\vec{F}, \varphi([b,c])),$$
$$T(\vec{F}, \varphi([b,a])) = -T(\vec{F}, \varphi([a,b])).$$

Si la courbe $\mathcal{C}$ est fermée, le travail s'appelle aussi *circulation* et se note

$$T(\vec{F}, \varphi([a,b])) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} d\varphi.$$

5.5. **Champ de potentiel, champ de gradient.** Soit $f(x,y,z) : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ une fonction, le champ de potentiel f, aussi appelé champ de gradient de f est le champ

$$\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z));$$

Un champ de potentiel est toujours conservatif et réciproquement ; son travail, le long d'une courbe $\varphi([a,b])$ est donné par

$$T(\nabla f, \varphi([a,b])) = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)).$$