CHAPITRE 5

Champs de vecteurs

DÉFINITION 5.1. *Un champ de vecteur est une application $\vec{F}$ définie et continue sur un domaine $D(\vec{F})$ de $\mathbf{R}^3$ qui a chaque point (x, y, z) de $\mathbf{R}^3$ associe une vecteur $\vec{F}(x, y, z)$ de $\mathbf{R}^3$:*

$$\vec{F} : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \mapsto & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \end{array}$$

Ainsi se donner un champs de vecteur revient à ce donner trois fonctions continues sur un domaine de $\mathbf{R}^3$ à valeurs réelles.

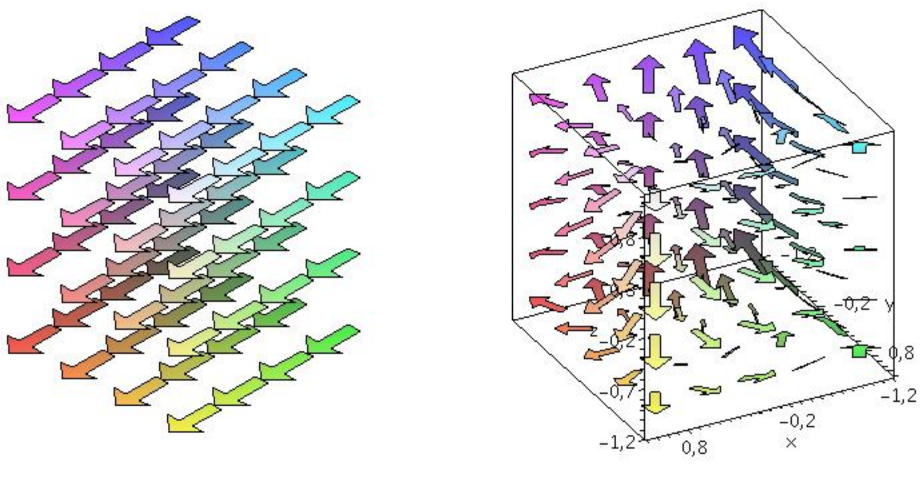

FIGURE 1. Exemples : $\vec{F}(x, y, z) = (1, 0, 0)$, $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 - y^2, 2y, z^2 - x)$

Exemple 0.3.3. (Champs de vecteurs constants) On considére une application qui associe a tout point un vecteur constant

$$\vec{F}(x,y,z) = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Exemple 0.3.4. On considére le champ $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2 - y^2, 2y, z^2 - x)$

1. Champs de gradients

Une classe trés importante de champs de vecteurs est celle des *champs de gradients* encore appelées *champ de potentiel* :

Définition 5.2. *Soit $f : D(f) \subset \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ une fonction différentiable définie sur un domaine $D(f)$. Le champ de gradient associé à f (on dit aussi le champ associé au potentiel f) est le champ définit sur $D(f)$ par*

$$\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)).$$

En d'autres termes les coordonnées du champ sont

$$F_1(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), F_2(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), F_3(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$$

Par exemple, un champ de vecteur constant $\vec{F}(x,y,z) = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ est le champ de gradient associé à la fonction (au potentiel)

$$f(x,y,z) = v_1 x + v_2 y + v_3 z = \vec{v}.(x,y,z).$$

Notons qu'un tel potentiel n'est pas unique : pour tout constant C

$$\nabla f = \nabla(f + C)$$

car $\nabla C = \vec{0}$. Notons que réciproquement si $\nabla f = \vec{0}$ alors $f = Constante$: en effet, si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \equiv 0$$

alors $f(x,y,z) = f(1,y,z)$ ne dépend pas de x, de même f ne dépend pas de y ni de z... Ainsi si $\nabla f_1 = \nabla f_2$ alors $f_1(x,y,z) - f_2(x,y,z) = Constante$: deux potentiels associés a un même champ de potentiel différent par une constante.

1.1. Exemple : le champ de gravitation.

Un corps ponctuel de masse M localisé à l'origine $(0,0,0)$ crée un potentiel gravitationel dont la valeur au point $P = (x,y,z)$ vaut

$$V(x,y,z) = -\frac{MG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{MG}{r}, \ r := \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \|(x,y,z)\|.$$

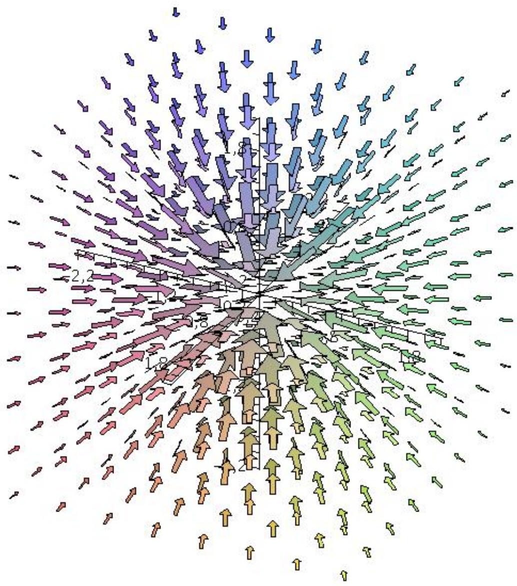

FIGURE 2. Le champ de gravitation $\vec{F} = -m\nabla V(x,y,z)$, $V = -\frac{MG}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$.

Un corps ponctuel de masse m, situé au point (x,y,z) subitra alors une force de gravitation dont le vecteur est donné par

$$\begin{aligned}\vec{F}(x,y,z) &= -m\nabla V(x,y,z)\\ &= -mMG\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\\ &= -\frac{mMG}{r^2}\vec{u}(x,y,z)\end{aligned}$$

avec

$$\vec{u}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right)$$

le vecteur unitaire (ie. de longueur $\|\vec{u}\| = 1$) colinéaire au vecteur $\vec{OP} = (x,y,z)$. et $G = 6,67.10^{-11}$ la constante gravitationelle. Le

1.2. Surfaces de potentiel. Etant donné un potentiel $f(x,y,z)$ et $\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$ le champ de potentiel associé, les surfaces de niveau

$$S_f(C) = \{(x,y,z) \in D(f),\ f(x,y,z) = C\}$$

pour C une constante fixée sont encore appelées les *surfaces* de potentiel du champ $\vec{F}$. Faisant varier la constante C on voit que l'espace est *partitionné* en une familles continue de surfaces de potentiel. Dans le chapitre précédent on a rencontré le phénomène suivant :

Soit $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $D(f)$ et $f_0 = f(x_0, y_0, z_0)$; le point P_0 appartient évidemment à la surface de potentiel $S_f(f_0)$. On a vu que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal au plan tangent à $S_f(f_0)$ en P_0, ce que l'on peut résumer ainsi

Proposition 5.1. *En tout point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, le champ de potentiel $\vec{F} = \nabla f$ est perpendiculaire à la surface de potentiel $S_f(f_0)$ passant par P_0.*

On a également le résultat suivant concernant les courbes paramétréées contenues dans les surfaces de potentiel :

Proposition 5.2. *Soit f un potentiel et $\vec{F} = \nabla f$ le champ de potentiel associé. Soit Cst une constante et $\varphi : [a, b] \mapsto \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrée qui est contenue dans la surface de potentiel $S_f(Cst)$ ($\varphi([a, b]) \subset S_f(Cst)$) alors pour tout t dans $[a, b]$, le vecteur tangent $\varphi'(t)$ est perpendiculaire à $\vec{F}(\varphi(t))$.*

1.3. Lignes de champ.

Définition 5.3. *Soit $\vec{F}$ un champ de vecteur. Une ligne de champ (associée à $\vec{F}$) est une courbe paramétrée $\varphi : [a, b] \mapsto \mathbf{R}^3$ telle que pour tout t le vecteur tangent $\varphi'(t)$ est colinéaire au vecteur $\vec{F}(\varphi(t))$.*

Exemple 1.3.1.
- Les lignes de champ du champ de vecteur constant $\vec{F} = (0, 0, 1)$ sont les droites verticales.
- Les lignes de champ du champ $\vec{F} = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ sont les droites passant par l'origine.

2. Travail d'un champ de vecteurs

Dans cette section on veut définir la notion de travail exercé par un champ (de force) lors du déplacement d'un corps le long d'une courbe paramétrée $\varphi : t \in [a, b] \mapsto \varphi(t) \in \mathbf{R}^3$.

2.1. Cas d'un champ constant et d'un segment de droite. On commence par le cas le plus simple du travail effectué par un champ constant $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ dans un déplacement φ le long du segment de droite $[A, B]$ en allant du point A au point B ($\varphi(a) = A,\ \varphi(b) = B$). Dans ce cas le travail est définit par

$$T(\vec{F}, \varphi([a, b])) = T(\vec{F}, \overrightarrow{AB}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F_1(x_B - x_A) + F_2(y_B - y_A) + F_3(z_B - z_A).$$

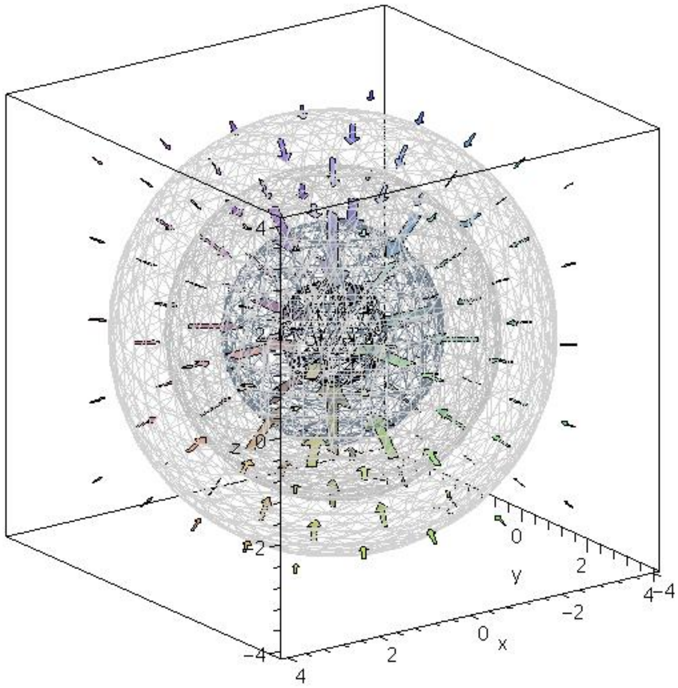

FIGURE 3. Le champ $\vec{F} = -m\nabla V(x, y, z)$, $V = -\frac{MG}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ et des surfaces de potentiel associées.

REMARQUE 2.1. Le travail ainsi définit ne dépend pas de la vitesse le long du segment $[A, B]$ (par exemple le travail ne dépend pas de a ou b ou $b - a$) ; si on allait de B à A ($\varphi(a) = B$, $\varphi(b) = A$), le travail obtenu serait l'opposé

$$T(\vec{F}, \varphi([b, a])) = T(\vec{F}, \overrightarrow{BA}) = -T(\vec{F}, \overrightarrow{AB}).$$

2.2. Cas général. Pour définir le travail dans le cas général (où le déplacement n'est pas rectiligne et le champ n'est pas forcement constant), on procéde comme pour la définition de la longueur d'une courbe : pour n trés grand, on subdivise l'intervalle de parcourt $[a, b]$ en n sous-intervalles de longueur $h_n = (b - a)/n$

$$[a, b] = [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup \cdots \cup [t_n, t_{n+1}]$$

avec

$$t_1 = a,\ t_{n+1} = b,\ t_k = a + (k - 1)(b - a)/n.$$

pour chaque $k = 1 \ldots n$, on a : si n est grand, la courbe paramétrée $\varphi([t_k, t_{k+1}])$ restreinte a l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ est proche du segment rectiligne $[\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]$, en

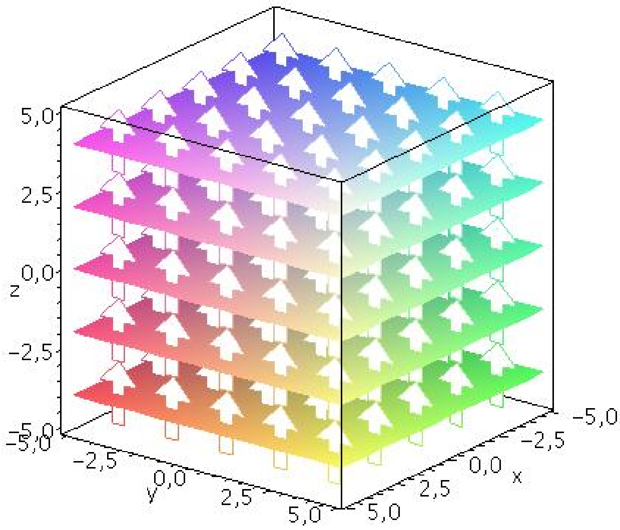

FIGURE 4. Le champ constant $\vec{F} = (0,0,1)$ associé au potentiel $f(x,y,z) = z$ et les surfaces de potentiel associées.

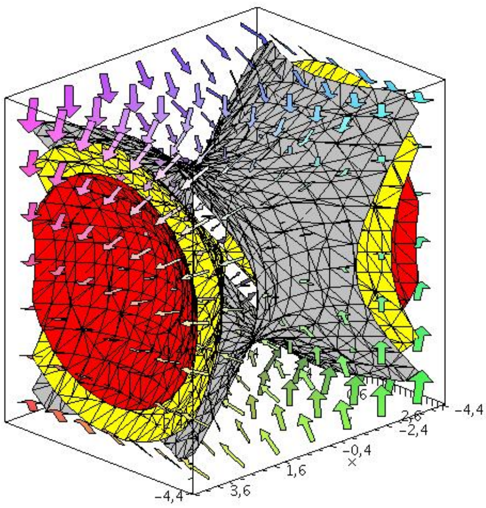

FIGURE 5. $f = x^2 + y^2 - z^2$, trois surfaces de potentiel et le champ de gradient associé

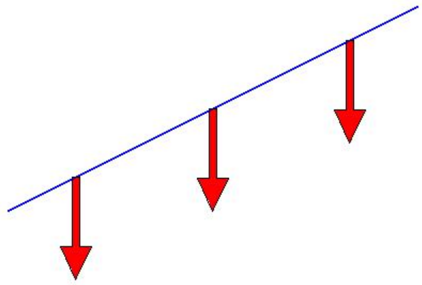

FIGURE 6. Travail d'un champ constant le long d'un segment

effet par la formle d'approximation linéaire (2.1), cette courbe est représentée par

$$h \in [0, h_n] \mapsto \varphi(t_k + h) = \varphi(t_k) + h\varphi'(t_k) + h\vec{\varepsilon}(h)$$

alors qu'un paramétrage du segment $[\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]$ est donné par

$$h \in [0, h_n] \mapsto \varphi(t_k) + h.\frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)}{h_n}$$

et si $h_n \to 0$

$$\frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)}{h_n} \sim \varphi'(t_k).$$

De plus quand $h \in [0, h_n]$ et que n est grand (donc h_n est petit)

$$\vec{F}(\varphi(t_k + h)) \sim \vec{F}(\varphi(t_k))$$

et le travail de $\vec{F}$ le long de l'arc $\varphi([t_k, t_{k+1}])$ est proche de celui effectué par le champ constant $\vec{F}(\varphi(t_k))$ le long du segment rectiligne $[\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]$

$$T(\vec{F}, \varphi([t_k, t_{k+1}])) \sim T(\vec{F}(\varphi(t_k)), [\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]).$$

Le travail le long de la courbe $\varphi([a, b])$ étant la somme des travaux le long des sous-courbes $\varphi([t_k, t_{k+1}])$ on obtient que le travail total est bien approximé par la somme

$$\sum_{k=1}^{n} T(\vec{F}(\varphi(t_k)), [\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \vec{F}(\varphi(t_k)).\varphi'(t_k)$$

On reconnait à nouveau une somme de Riemann convergente

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \vec{F}(\varphi(a + (k-1)\frac{b-a}{n})).\varphi'(a + (k-1)\frac{b-a}{n}) \to \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)).\varphi'(t)dt.$$

Ceci justifie la

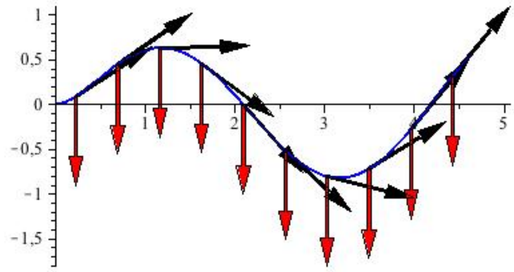

FIGURE 7. travail d'un champ constant le long d'une courbe

DÉFINITION 5.4. *Le travail d'un champ de vecteur $\vec{F}$ le long d'une courbe paramétrée $\varphi : [a,b] \mapsto \mathbf{R}^3$ est donné par la formule*

$$T(\vec{F}, \varphi([a,b])) = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)).\varphi'(t)dt.$$

2.2.1. *Exemple : segment de droite dans un chmp constant.* Soit $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un champ constant. Considérons le cas d'un segment de droite :

$$\varphi(t) = ((1-t)x_A + tx_B, (1-t)y_A + ty_B, (1-t)z_A + tz_B).$$

On a

$$\varphi'(t) = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = \overrightarrow{AB}$$

et donc

$$T(\vec{F}, \varphi([0,1])) = \int_0^1 \vec{F}.\overrightarrow{AB}dt = \vec{F}.\overrightarrow{AB}.$$

On retrouve donc le résultat attendu.

2.2.2. *Exemple : cercle.*

$$\varphi(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t), z_0)$$

et

$$\varphi'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t), 0).$$

Ainsi si $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ est un champ constant, on obtient

$$T(\vec{F}, \varphi([0, 2\pi])) = \int_0^{2\pi} F_1.(-R(\sin(t)) + F_2.R\cos(t) + F_3.0dt = 0.$$

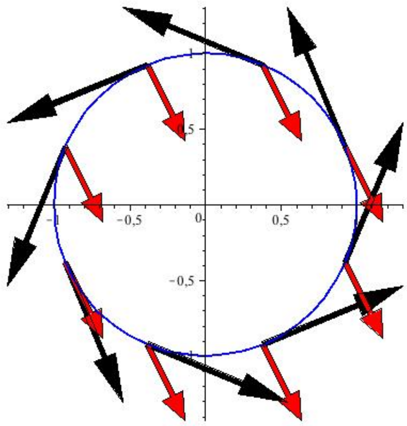

FIGURE 8. Travail d'un champ constant sur un cercle

Supposons $x_0 = y_0 = 0$ et $\vec{F}(x,y,z) = \nabla(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = r^{-2}(x/r, y/r, z/r)$, on a en posant $R_0 = \sqrt{R^2+z_0^2}$

$$\vec{F}(\varphi(t)) = R_0^{-2}(R\cos(t)/R_0, R\sin(t)/R_0, z_0/R_0)$$

et on obtient

$$T(\vec{F}, \varphi([0,2\pi])) = R^2R_0^{-3}.\int_0^{2\pi}(-\cos(t)\sin(t)) + \sin(t)\cos(t) + 0dt = 0.$$

considérons maintenant le champ $\vec{F} = (x,y,z)$.

$$T(\vec{F}, \varphi([0,2\pi])) = \int_0^{2\pi}(x_0 + R\cos(t)).(-R(\sin(t)) + (x_0 + R\sin(t)).R\cos(t)dt = 0.$$

On verra plus loin que ces annulations ne sont pas des accidents.

2.3. Propriétées du travail.

2.3.1. *Additivité par juxtaposition.* Soit

$$\varphi_1 : t \in [a,b] \mapsto (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$$

et

$$\varphi_2 : t \in [b,c] \mapsto (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$

deux courbes paramétrées telles que $\varphi_2(b) = \varphi_1(b)$; on forme une nouvelle courbe

$$\varphi_3 : [a,c] \mapsto \mathbf{R}^3$$

en posant $\varphi_3(t) = \varphi_1(t)$ si $a \leqslant t \leqslant b$ et $\varphi_3(t) = \varphi_2(t)$ si $b \leqslant t \leqslant c$. On a alors

$$\begin{aligned} T(\vec{F}, \varphi_3([a,c])) &= T(\vec{F}, \varphi_3([a,b])) + T(\vec{F}, \varphi_3([b,c])) \\ &= T(\vec{F}, \varphi_1([a,b])) + T(\vec{F}, \varphi_2([b,c])). \end{aligned}$$

En effet

$$\int_a^c \vec{F}(\varphi_3(t)).\varphi_3'(t)dt = \int_a^b \vec{F}(\varphi_3(t)).\varphi_3'(t)dt + \int_b^c \vec{F}(\varphi_3(t)).\varphi_3'(t)dt$$
$$= \int_a^b \vec{F}(\varphi_1(t)).\varphi_1'(t)dt + \int_b^c \vec{F}(\varphi_2(t)).\varphi_2'(t)dt$$

2.3.2. *Invariance par changement de paramètre.* Soit

$$\varphi : [a,b] \mapsto \mathbf{R}^3$$

une courbe paramétrée et sur $u : [a', b'] \mapsto [a, b]$ un changement de paramètre (u est dérivable strictement croissante et $u(a') = a$, $u(b') = b$), on obtient donc une nouvelle courbe paramétrée

$$\varphi_2 : s \in [a', b'] \mapsto \varphi(u(s)) \in \mathbf{R}^3.$$

Proposition 5.3. *On a*

$$T(\vec{F}, \varphi_2([a', b'])) = T(\vec{F}, \varphi([a, b])).$$

autrement dit le travail ne dépend pas du choix du paramètre.

Preuve:

$$T(\vec{F}, \varphi_2([a', b'])) = \int_{a'}^{b'} \vec{F}(\varphi_2(s)).\varphi_2'(s)ds$$

avec (dérivée des fonctions composées)

$$\varphi_2(s) = \varphi(u(s)),\ \varphi_2'(s) = u'(s)\varphi'(u(s)).$$

Ainsi par changement de variable

$$t = u(s),\ dt = u'(s)ds,\ a = u(a'),\ b = u(b')$$

on a

$$\int_{a'}^{b'} \vec{F}(\varphi_2(s)).\varphi_2'(s)ds = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)).\varphi'(t)dt = T(\vec{F}, \varphi([a, b])).$$

2.3.3. *Inversion du temps.* Soit

$$\varphi : t \in [a,b] \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

une courbe paramétrée reliant $A = \varphi(a)$ à $B = \varphi(b)$. Posons alors

$$\varphi_2 : s \in [a,b] \mapsto (x(b-s+a), y(b-s+a), z(b-s+a));$$

quand s varie entre a et b, $b - s + a$ est une fonction décroissante variant entre b et a ; on obtient donc une nouvelle courbe paramétrée $\varphi_2([a, b])$ parcourant la même courbe géométrique mais en allant de B à A : on peut noter cette nouvelle courbe $\varphi([b, a])$. On a alors

$$T(\vec{F}, \varphi([b, a])) = T(\vec{F}, \varphi_2([a, b])) = -T(\vec{F}, \varphi([a, b])).$$

En effet, $\varphi_2'(s) = -\varphi'(b-s+a)$ et donc

$$\int_a^b \vec{F}(\varphi_2(s)).\varphi_2'(s)ds = -\int_a^b \vec{F}(\varphi(b-s+a)).\varphi'(b-s+a)ds$$
$$= \int_b^a \vec{F}(\varphi(t)).\varphi'(t)dt = -\int_a^b \vec{F}(\varphi(t)).\varphi'(t)dt$$

où on a fait le changement de variable $t = b-s+a\ dt = -ds$.

Ainsi *le travail s'inverse lorsqu'on parcours le chemin en sens inverse.*

2.3.4. *Notation intrinsèque du travail.* Compte-tenu de l'invariance du travail effectué par un champ sous une changement de paramétrage, on utilisera la notation suivante pour le travail d'un champ le long d'une courbe géométrique $\mathcal{C}$ parcourue dans un sens *donné* : si $\mathcal{C} = \varphi([a,b])$, on écrira

$$T(\vec{F}, \varphi([a,b])) := \int_{\mathcal{C}} \vec{F}.d\varphi.$$

Ainsi si on désigne par $-\mathcal{C}$ la même courbe parcourue *en sens inverse* ($-\mathcal{C} = \varphi([b,a])$), on aura

$$\int_{-\mathcal{C}} \vec{F}.d\varphi = -\int_{\mathcal{C}} \vec{F}.d\varphi$$

2.3.5. *Circulation d'un champ de vecteur.* Si la courbe paramétrée φ vérifie

$$A = \varphi(a) = \varphi(b) = B$$

la courbe géométrique $\mathcal{C}$ est *fermée* : le travail d'un champ le long d'une telle courbe est appelé *circulation* du champ $\vec{F}$ le long de $\mathcal{C}$ et est noté

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}.d\varphi.$$

3. Champs conservatifs

On a vu précédemment que le travail d'un champ le long d'une courbe ne dépend pas du paramétrage de la courbe ; en revanche il dépend en général de la courbe géométrique associée. On peut ainsi dire que :

le travail dépend du chemin suivi, mais pas de la maniére dont le chemin est suivi.

Définition 5.5. *On dira qu'un champs $\vec{F}$ est* conservatif*, si son travail le long d'une courbe $\varphi([a,b])$ dans $D(\vec{F})$ ne dépend que des extrémités de la courbe $A = \varphi(a)$ et $B = \varphi(b)$ mais pas de la courbe elle-même ; ie. si le travail reste le même pour toute courbe de $D(\vec{F})$ réliant A à B.*

Autrement dit *un champ de vecteurs est conservatif si le travail effectué ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée.*

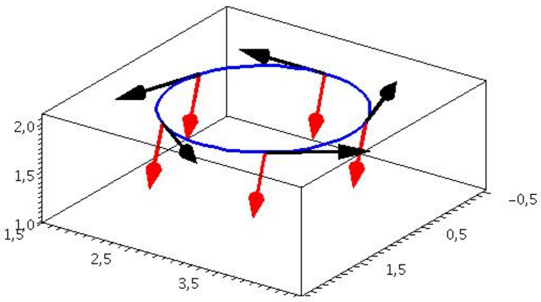

FIGURE 9. circulation d'un champ constant le long d'un cercle.

NOTATION. *Si un champ $\vec{F}$ est conservatif, on notera le travail de $\vec{F}$ le long de tout chemain reliant A à B par*

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F}.d\varphi = T(\vec{F}, \widehat{AB}).$$

3.0.6. *Exemple : Un champ constant $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ est conservatif.* En effet soit A, B deux point et $\varphi : [a, b] \mapsto \mathbf{R}^3$ tel que

$$\varphi(a) = A = (x_A, y_A, z_A),\ \varphi(b) = B = (x_B, y_B, z_B);$$

écrivons $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

$$\begin{aligned} T(\vec{F}, \varphi([a, b])) &= \int_a^b F_1 x'(t) + F_2 y'(t) + F_3 z'(t) dt \\ &= F_1(x(b) - x(a)) + F_2(y(b) - y(a)) + F_3(z(b) - z(a)) \\ &= F_1(x_B - x_A) + F_2(y_B - y_A) + F_3(z_B - z_A) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la valeur du travail le long du segment rectiligne $\overrightarrow{AB}$.

3.0.7. *Exemple : Le champ $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, xz, 1)$ n'est pas conservatif.* Considérons les courbes de $[0, 1] \mapsto \mathbf{R}^3$

$$\varphi_1(t) = (t, t, t),\ \varphi_2(t) = (t, t^2, t^3)$$

qui joignent les point $A = (0, 0, 0)$ et $B = (1, 1, 1)$: on a

$$\varphi_1'(t) = (1, 1, 1),\ \varphi_2(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$T(\vec{F}, \varphi_1) = \int_0^1 t^2 + t^2 + 1dt = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

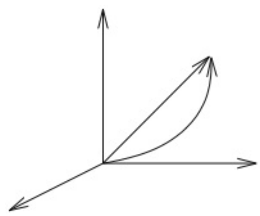

FIGURE 10. Les courbes $\varphi_1(t) = (t, t, t)$, $\varphi_2(t) = (t, t^2, t^3)$

$$T(\vec{F}, \varphi_2) = \int_0^1 t^4 + t^4.2t + 3t^2 dt = \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + 1 = \frac{46}{30} \neq \frac{5}{3}.$$

On a la caractérisation suivante d'un champ conservatif

PROPOSITION 5.4. *Un champ $\vec{F}$ est conservatif si et seulement si, son travail le long d'une courbe fermée est nul : pour tout courbe $\mathcal{C}$ fermée*

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}.d\varphi = 0.$$

Preuve: Soit $\varphi : [a,b] \mapsto \mathbf{R}^3$ une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C}$. Notons $\varphi(a) = \varphi(b) = A$. Soit $B = \varphi(\frac{a+b}{2})$. La courbe $\mathcal{C}$ est réunion de deux courbes paramétrées φ_1, φ_2 avec

$$\varphi_1 : t \in [a, \frac{a+b}{2}] \mapsto \varphi(t),\ \ \varphi_2 : t \in [\frac{a+b}{2}, b] \mapsto \varphi(t)$$

qui relient A à B puis B à A respectivement. On a

$$\begin{aligned} T(\vec{F}, \varphi([a,b])) &= \int_a^b \vec{F}(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \vec{F}(\varphi(t))\varphi'(t)dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \vec{F}(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= T(\vec{F}, \varphi_1([a, \frac{a+b}{2}])) + T(\vec{F}, \varphi_2([\frac{a+b}{2}, b])). \end{aligned}$$

Mais la courbe $\varphi_3(t) = \varphi_2(b - t + \frac{a+b}{2})$ relie A à B en suivant la même courbe géométrique que φ_2 et donc

$$T(\vec{F}, \varphi_2([\frac{a+b}{2}, b])) = -T(\vec{F}, \varphi_3([\frac{a+b}{2}, b])) = -T(\vec{F}, \varphi_1([a, \frac{a+b}{2}]))$$

car le champ est conservatif et φ_3 et φ_1 relient les mêmes points. Ainsi

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}.d\varphi = T(\vec{F}, \varphi([a,b])) = T(\vec{F}, \varphi_1([a, \frac{a+b}{2}])) - T(\vec{F}, \varphi_1([a, \frac{a+b}{2}])) = 0.$$

$\square$

On va maintenant caractériser les champs de vecteurs conservatifs comme étant les champs de potentiels. Nous aurons d'abord besoin de la définition suivante :

DÉFINITION 5.6. *Un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^3$ est connexe par arcs si et seulement si deux points quelconques A et B peuvent toujours être reliés par une courbe paramétrée.*

Théorème 5.1. *Soit un champ de vecteur $\vec{F}$, définit sur domaine $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^3$ connexe par arcs. Alors $\vec{F}$ est conservatif si et seulement si $\vec{F}$ est un champ de potentiel : ssi il existe une fonction $f(x, y, z)$ différentiable telle que*

$$\vec{F} = \nabla f.$$

Dans ce cas, pour toute courbe paramétrée φ à valeur dans D reliant un point A à un point B on a

$$T(\vec{F}, \overset{\frown}{AB}) = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = f(B) - f(A).$$

Preuve: Soit $\vec{F} = \nabla f$ un champ de potentiel. Montrons que $\vec{F}$ est conservatif. Soient $A, B \in \mathcal{D}$ et $\varphi : [0, 1] \mapsto \mathcal{D}$ une courbe contenue dans $\mathcal{D}$ liant A à B ($\varphi(0) = A$, $\varphi(1) = B$).

$$\int_{\overset{\frown}{AB}_\varphi} \vec{F}.d\varphi = \int_0^1 \vec{F}(\varphi(t)).\varphi'(t)dt = \int_0^1 \nabla f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt.$$

Soit

$$\psi : t \mapsto f(\varphi(t));$$

on a vu précédemment (règle de dérivation des fonctions composées) que

$$\psi'(t) = \nabla f(\varphi(t)).\varphi'(t)$$

et l'inégrale précédente vaut donc

$$\int_0^1 \nabla f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt = \int_0^1 \psi'(t)dt = \psi(1) - \psi(0) = f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)) = f(B) - f(A).$$

Réciproquement, considérons un champ conservatif $\vec{F}$; soit $A = (x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{D}$ un point fixé du domaine $\mathcal{D}$. Pour tout point $B = (x, y, z)$ de $\mathcal{D}$ posons

$$f(B) = f(x, y, z) = T(\vec{F}, \overset{\frown}{AB}),$$

le travail étant calculé en suivant une courbe paramétrée quelconque reliant A à B. Notons qu' une telle courbe existe car $\mathcal{D}$ est supposé connexe par arcs ; d'autre part le travail ne dépend pas de la courbe choisie car le champ est conservatif. En particulier prenant une courbe fermée allant de A à A, on a, par la proposition précédente

$$f(A) = T(\vec{F}, \overset{\frown}{AA}) = 0.$$

Remarque 3.1. Il est naturel de prendre $f(B)$ de la forme

$$T(\vec{F}, \overset{\frown}{AB}).$$

En effet l'argument précédent montre que si $\vec{F} = \nabla f$ est un champ de potentiel, alors

$$f(B) - f(A) = T(\nabla f, \overset{\frown}{AB}).$$

On va montrer que
$$\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z).$$
Il s'agit de montrer que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h} = F_1(x,y,z)$$
et que
$$\frac{\partial f}{\partial y} = F_2,\ \frac{\partial f}{\partial z} = F_3.$$
soit $h \in \mathbf{R}$ petit ; posons $B = (x,y,z)$, $B_h = (x+h,y,z)$. On veut calculer
$$\lim_{h\to 0} \frac{T(\vec{F}, \overset{\frown}{AB_h}) - T(\vec{F}, \overset{\frown}{AB})}{h}.$$
Or, on a
$$\begin{aligned} 0 = T(\vec{F}, \overset{\frown}{AA}) &= T(\vec{F}, \overset{\frown}{AB}) + T(\vec{F}, \overset{\frown}{BB_h}) + T(\vec{F}, \overset{\frown}{B_hA}) \\ &= T(\vec{F}, \overset{\frown}{AB}) + T(\vec{F}, \overset{\frown}{BB_h}) - T(\vec{F}, \overset{\frown}{AB_h}) \end{aligned}$$
et donc
$$\frac{T(\vec{F}, \overset{\frown}{AB_h}) - T(\vec{F}, \overset{\frown}{AB})}{h} = \frac{T(\vec{F}, \overset{\frown}{BB_h})}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \vec{F}(\varphi(t)).\varphi'(t)dt$$
avec
$$\varphi(t) = (x+t,y,z)$$
la courbe paramétrée qui parcourt le segment $[B, B_h]$ a vitesse constante : si h est assez petit, on peut supposer qu'un tel segment est entiérement contenu dans $\mathcal{D}$. Ainsi, comme $\varphi'(t) = (1,0,0)$, on a
$$\frac{1}{h}\int_0^h \vec{F}(\varphi(t)).\varphi_h'(t)dt = \frac{1}{h}\int_0^h F_1(x+t,y,z)dt$$
Soit G une primitive de la fonction (d'une variable réelle) $g : t \mapsto F_1(x+t,y,z)$ alors l'intégrale précédente vaut
$$\frac{1}{h}\int_0^h g(t)dt = \frac{G(h) - G(0)}{h}$$
et donc
$$\lim_{h\to 0} \frac{T(\vec{F}, \overset{\frown}{AB_h}) - T(\vec{F}, \overset{\frown}{AB})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{G(h) - G(0)}{h} = G'(0) = g(0) = F_1(x,y,z).$$
On a donc montré que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = F_1(x,y,z).$$
Appliquant le même raisonnement pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, on conclut que
$$\nabla f(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)) = \vec{F}(x,y,z).$$

ainsi la fonction f est une fonction définie sur le domane $\mathcal{D}$ admettant des dérivées partielles

$$(\frac{\partial f}{\partial x} = F_1, \frac{\partial f}{\partial y} = F_2, \frac{\partial f}{\partial z} = F_3)$$

continues (car $\vec{F}$ est continu) en tout point de $\mathcal{D}$. Par le Théorème 2.1 f est différentiable. $\square$