CHAPITRE 4

Courbes paramétrées

1. Courbe dépendant d'un paramètre

Une courbe paramétrée (dans $\mathbf{R}^3$) est une fonction d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^3$

$$\varphi : \begin{array}{ccc} I = (a,b) \subset \mathbf{R} & \mapsto & \mathbf{R}^3 \\ t & \mapsto & \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

En d'autre termes a tout point t de l'intervalle I on associe un point repéré par ses trois coordonnées $x(t), y(t), z(t)$ définies par trois fonctions d'une variable

$$x(t), y(t), z(t) : I \mapsto \mathbf{R}.$$

Remarque 1.1. Si $t \to z(t) = 0$ est la fonction identiquement nulle, on obtient une *courbe* dans le plan $z = 0$: *une courbe plane.*

1.1. Courbe paramétrée vs. courbe géométrique. Une interprétation possible est que la fonction φ décrit la trajectoire d'un point en fonction du temps : $\varphi(t)$ est la position du point au temps t.

L'image $\varphi(I)$ de l'intervalle I,

$$\varphi(I) = \{\varphi(t),\ t \ dans\ I\}$$

s'appelle la *courbe géométrique* associée à φ. Il est important de bien distinguer entre courbe géométrique et courbe paramétrée : cette dernière donne plus d'information puisque on sait ou se trouve le point en chaque temps t donné. En revanche, la *courbe géométrique* ne donne que l'ensemble de toutes les positions prises par le point quand le temps varie. Ainsi deux courbes paramétrées différentes peuvent donner la même courbe géométrique. Pour aller dans l'autre sens (de la courbe géométrique vers une courbe paramétrés) on fait la définition suivante :

Définition 4.1. *Soit C une courbe géométrique ; une paramétrisation (ou un paramétrage) de C est une courbe paramétrée*

$$\varphi : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$$

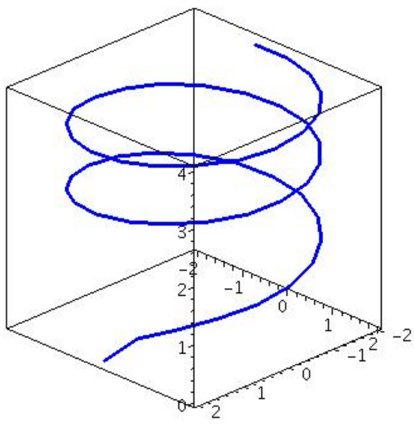

FIGURE 1. $t \mapsto (2\cos(t), 2\sin(t), t^{1/2})$

dont l'image (la courbe géométrique associée) $\varphi(I)$ est C et qui est une bijection entre I et C (à tout point $P \in C$ correspond un unique $t_P \in I$ tel que $\varphi(t_P) = P$).

Ainsi si $C = \varphi(I)$ est la courbe géométrique, on dit que φ fournit une *paramétrisation* de C.

1.2. Exemples.

1.2.1. *Segment de droite.* Soient $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace. Soit

$$I = [0,1],\ \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ \begin{array}{r}x(t) = (1-t)x_A + tx_b\\ y(t) = (1-t)y_A + ty_b\\ z(t) = (1-t)z_A + tz_b\end{array}$$

Ainsi $\varphi(0) = A$, $\varphi(1) = B$ et $\varphi(t)$ est le point du segment $[A, B]$ dont le rapport de la distance à A par rapport à la longueur de $[A, B]$ est t. Ainsi la courbe géométrique $\varphi([0, 1])$ est le segment de droite $[A, B]$.

Notons que si on définit

$$I = [0,1],\ \varphi_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)),\ \begin{array}{r}x_2(t) = tx_A + (1-t)x_b\\ y_2(t) = ty_A + (1-t)y_b\\ z_2(t) = tz_A + (1-t)z_b\end{array}$$

on obtient le même segment de droite $[A, B]$ mais parcouru en sens inverse (de B à A) ; ainsi la courbe géométrique (le segment $[A, B]$) est la même.

1.2.2. *Cercle.* Soit P_0 le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0), $R > 0$ et $I = [0, 2\pi]$ et

$$\varphi(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t), z_0).$$

On obtient comme courbe géométrique un cercle centré en P_0 de rayon R. Notons que ce cercle est contenu dans le plan d'équation $z = z_0$: on a une courbe plane horizontale. Cette courbe n'est pas exactement un paramétrage du cercle car le point

(x_0+R, y_0, z_0) correspond a deux t, 0 et 2π. En revanche la restriction de φ à l'intervalle $[0, 2\pi[$ est un paramétrage.

On étudiera également les deux situation particulières suivantes.

1.2.3. *Courbe contenue dans une graphe.* Soit $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ une fonction de deux variables. Donnons nous deux fonctions sur I, $x(t), y(t) : I \mapsto \mathbf{R}$ et posons

$$z(t) = f(x(t), y(t));$$

on obtient une courbe paramétrée

$$\varphi(t) : t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))).$$

En particulier la courbe géométrique associée est entièrement contenue dans le *graphe* de f,

$$\mathscr{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ z = f(x, y).\} = \{(x, y, f(x, y)),\ x, y \in I \times I\}.$$

1.2.4. *Courbe contenue dans une variété de niveau.* La situation précédent se généralise au cas des surfaces de niveau : étant donné une fonction de trois variables

$$F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},$$

et $C \in \mathbf{R}$ une constante, on a la variété de niveau C

$$V_F(C) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ F(x, y, z) = C\}.$$

Considérons une courbe paramétrée

$$\varphi(t) : t \in I \mapsto (x(t), y(t), z(t)),$$

telle que pour tout $t \in I$ on ait

$$F(\varphi(t)) = F(x(t), y(t), z(t)) = C.$$

Alors la courbe géométrique $\varphi(I)$ est contenue dans la variété de niveau $V_F(C)$.

Remarque. Ce cas généralise le précédent en prenant

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z,\ C = 0.$$

2. Vecteur tangent-vecteur vitesse

Définition 4.2. *Soit $\varphi(t)$ une courbe paramétrée ; le vecteur tangent (où vecteur vitesse) en $t = t_0 \in I$ est la limite (quand elle existe)*

$$\lim_{t \to t_0, t \neq t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0, h \neq 0} \left(\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}, \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}, \frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h}\right).$$

Ainsi cette limite existe ssi les fonctions $x(t), y(t), z(t)$ sont dérivables en t_0. On note ce vecteur $\varphi'(t_0)$ ou encore $\dot\varphi(t_0)$

$$\varphi'(t_0) = \dot\varphi(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

En particulier on a une formule d'approximation linéaire (posant $t = t_0 + h$)

$$\varphi(t) = \varphi(t_0 + h) = \varphi(t_0) + h\varphi'(t_0) + h\vec{\varepsilon}(h) \tag{2.1}$$

avec $\vec{\varepsilon}(h)$ un vecteur tel que

$$\|\vec{\varepsilon}(h)\| \to 0, \ h \to 0.$$

2.1. Tangente à une courbe. Considérons la fonction linéaire qui apparait dans la formule d'approximation linéaire ci-dessus

$$h \mapsto \varphi(t_0) + h\varphi'(t_0) \in \mathbf{R}^3$$

ou encore en posant $t = t_0 + h$

$$t \mapsto \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) \in \mathbf{R}^3.$$

Ce sont deux courbes paramétrées qui valent $\varphi(t_0)$ en $t = t_0$ ou $h = 0$ et dont la courbe géométrique associée est une *droite* : la droite passant par $\varphi(t_0)$ et qui est portée par le vecteur $\varphi'(t_0)$.

Définition 4.3. *Cette droite est la tangente à la courbe φ au point $\varphi(t_0)$.*

La formule d'approximation linéaire (2.1) s'écrit

$$\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0) + h\varphi'(t_0) = h\vec{\varepsilon}(h), \ h \to 0$$

ce qui s'interprete en disant que au voisinage de $\varphi(t_0)$ la courbe paramétrée φ est proche de sa tangente.

2.2. Exemples.

2.2.1. *Segment de droite.* Soient $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace. Soit

$$I = [0,1], \ \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)), \ \begin{array}{r} x(t) = (1-t)x_A + tx_b \\ y(t) = (1-t)y_A + ty_b \\ z(t) = (1-t)z_A + tz_b \end{array}$$

On a

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \ \begin{array}{r} x'(t) = -x_A + x_b \\ y'(t) = -y_A + y_b \\ z'(t) = -z_A + z_b \end{array}$$

Ainsi $\varphi'(t_0)$ est égal au vecteur constant $\vec{AB}$. De même pour

$$\varphi_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)), \ \begin{array}{r} x_2(t) = tx_A + (1-t)x_b \\ y_2(t) = ty_A + (1-t)y_b \\ z_2(t) = tz_A + (1-t)z_b \end{array}$$

on obtient que $\varphi_2'(t_0) = (x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B)$ est égal au vecteur constant $\vec{BA}$.

La tangente à la courbe est exactement la droite AB.

2.2.2. *Cercle.* Soit $C_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $R > 0$ et $I = [0, 2\pi]$ et

$$\varphi(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t), z_0).$$

On obtient

$$\varphi'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t), 0).$$

On obtient un vecteur contenu dans le plan horizontal d'équation $z = 0$.

Remarque 2.1. Notons que le vecteur $\varphi'(t_0)$ est perpendiculaire au vecteur

$$\overrightarrow{C_0\varphi(t_0)} = (R\cos(t_0), R\sin(t_0), 0)$$

et donc la tangente en $\varphi(t_0)$ est précisement la tangent au centre en ce point.

2.2.3. *Courbe contenue dans un graphe.* Soit $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ une fonction de deux variables et deux fonctions sur I, $x(t), y(t) : I \mapsto \mathbf{R}$ et posons

$$z(t) = f(x(t), y(t));$$

$$\varphi(t) : t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))).$$

En particulier la courbe géométrique associée est entièrement contenue dans le *graphe* de f,

$$\mathscr{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ z = f(x, y).\} = \{(x, y, f(x, y),\ x, y \in I \times I\}.$$

La règle de dérivation des fonctions composées dit que (si $x(t), y(t)$ sont dérivables et $f(x, y)$ est différentiable)

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

avec

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) = \nabla f(x(t), y(t)).(x'(t), y'(t)).$$

Etant donné (x_0, y_0); rappelons que le vecteur normal au graphe de f au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est donné par

$$\vec{n}(f)(x_0, y_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1)$$

Ainsi, notant $z_0 = f(x(t_0), y(t_0))$ on obtient

$$\vec{n}(f)(x_0, y_0).\varphi'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)).x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)).y'(t_0) + (-1).z'(t_0) = 0.$$

Rappelons également que l'équation du plan tangent à $\mathscr{G}_f$ au point

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, z_0)$$

est donnée par (posant $\vec{x} := (x, y, z)$)

$$(\vec{x} - \vec{x}_0).\vec{n}(f)(x_0, y_0) = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) - (z - z_0) = 0.$$

Si $\vec{x}$ appartient à la tangente à la courbe en $\varphi(t_0) = \vec{x}_0$, il est de la forme

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + (t - t_0)\varphi'(t_0),$$

pour $t \in \mathbf{R}$; il vérifie donc

$$(\vec{x} - \vec{x}_0).\vec{n}(f)(x_0, y_0) = (t - t_0)\vec{n}(f)(x_0, y_0).\varphi'(t_0) = 0$$

et appartient donc au plan tangent.

On a donc la

PROPOSITION 4.1. *Le vecteur tangent $\varphi'(t_0)$ est perpendiculaire au vecteur normal au graphe de f au point $\vec{x}_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, $\vec{n}_{(x_0,y_0)}(f)$; en d'autre termes, le vecteur tangent est parallèle au plan tangent au graphe de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ et la droite tangente à la courbe en $\vec{x}_0$ appartient au plan tangent au graphe en ce point.*

2.3. Vecteur tangent à une courbe contenue dans une variété de niveau. En fait l'exemple précédent est un cas particulier du résultat général suivant (appliquer à la fonction

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z, \ C = 0. \ )$$

THÉORÈME 4.1. *Soit $F(x, y, z)$ une fonction de trois variables et C une constante et $V_F(C)$ la variété de niveau associée. Soit $\varphi : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrée entièrement contenue dans $V_F(C)$: telle que pour tout t on ait*

$$F(x(t), y(t), z(t)) = C.$$

Soit t dans I tel que la plan tangent à $V_F(C)$ au point $(x(t), y(t), z(t))$ existe (ie. si

$$\nabla F(x(t), y(t), z(t)) \neq \vec{0}.)$$

Alors, le vecteur tangent $\varphi'(t)$ est toujours parallèle à ce plan et la tangente à la courbe au point $\varphi(t)$ est contenue dans le plan tangent.

Preuve: Considérons la fonction

$$h(t) : \ t \to F(x(t), y(t), z(t)).$$

Par hypothèse, cette fonction est constante égale à C et sa dérivée est nulle : par la règle de dérivation des fonctions composées (voir ci-dessous), on a pour tout $t_0 \in I$

$$h'(t) = 0 = \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t)).x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(t)).y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(t)).z'(t) = \nabla F(x(t), y(t), z(t)).\varphi'(t).$$

Ainsi le vecteur vitesse $\varphi'(t)$ est perpendiculaire au vecteur normal à la surface $V_F(C)$ au point $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ et donc est parallèle au plan tangent en ce point.

Soit $\vec{x}$ appartenant à la tangente à la courbe en $\vec{x}_0\varphi(t_0)$, $\vec{x}$ est de la forme

$$\vec{x} = \varphi(t_0) + h\varphi'(t_0),$$

pour $h \in \mathbf{R}$; il vérifie donc

$$(\vec{x} - \vec{x}_0).\nabla F(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = h\nabla F(x(t_0), y(t_0), z(t_0)).\varphi'(t_0) = 0$$

et appartient donc au plan tangent. □

2.4. Appendice : formule de dérivation des fonctions composées. Soit

$$F : \begin{array}{ccc} D \subset \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \to & F(x_1, \cdots, x_n) \end{array}$$

une fonction de n-variables qu'on suppose différentiable sur D ; soient $x_1(t), \cdots x_n(t)$, n fonctions d'une variable réelle

$$x_i : \begin{array}{ccc} I \subset \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ t & \to & x_i(t) \end{array}$$

qu'on suppose dérivables. On définit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbf{R}^n \\ t & \to & \varphi(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)), \end{array}$$

et on suppose que $\varphi(I) \subset D$. On définit alors la fonction d'une variable

$$g = F \circ \varphi : t \in I \to F(\varphi(t)) = F(x_1(t), \cdots x_n(t)).$$

On a le

THÉORÈME 4.2 (Dérivation des fonctions composées). *La fonction $t \to g(t)$ est dérivable sur I et sa dérivée en $t_0 \in I$ vaut*

$$\begin{aligned} g'(t_0) &= x_1'(t_0)\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1(t_0), \cdots x_n(t_0)) + \cdots + x_n'(t_0)\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1(t_0), \cdots x_n(t_0)) \\ &= \nabla F(\varphi(t_0)).\varphi'(t_0) \end{aligned}$$

avec

$$\varphi'(t_0) = (x_1'(t_0), \cdots x_n'(t_0)).$$

Preuve: □

3. Longueur d'une courbe paramétrée

Dans cette section on veut définir et calculer la longueur d'une courbe paramétrée.

3.1. Ligne polygonales. On part du cas le plus simple, celui d'un segment de droite $[A, B]$ avec $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ dans ce cas, la longueur est simplement la norme euclidienne du vecteur $\vec{AB}$

$$\ell([A, B]) = \|\vec{AB}\| = ((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2)^{1/2}.$$

Le cas suivant est celui d'une *ligne polygonale* : ie. une réunion de segments

$$L = [P_1, P_2] \cup [P_2, P_3] \cup \cdots \cup [P_n, P_{n+1}], \;\; P_i = (x_i, y_i, z_i).$$

dans ce cas la longueur de L est simplement la somme des longueur des segments

$$\ell(L) = \ell([P_1, P_2]) + \cdots + [P_n, P_{n+1}] = \sum_{i=1}^{n} \ell([P_i, P_{i+1}]).$$

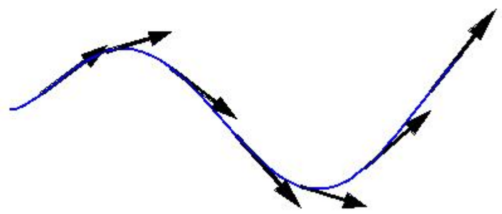

FIGURE 2. Approximation par une ligne polygonale

3.2. Courbes paramétrées. Etant donnée une courbe paramétrée

$$\varphi(t) : [a, b] \to \mathbf{R}^3$$

suffisament *régulière* (ie. les coordonnées $x(t), y(t), z(t)$ sont continues et dérivables) on peut déduire de la formule d'approximation linéaire (2.1) que dans une sens convenable la courbe sera bien "approximée" par une ligne polygonale de la forme

$$L_k = [\varphi(t_1), \varphi(t_2)] \cup [\varphi(t_2), \varphi(t_3)] \cup \cdots \cup [\varphi(t_n), \varphi(t_{n+1})]$$

avec

$$t_1 = a < t_2 < \cdots < t_k < t_{n+1} = b$$

formant une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ qui devient de plus en plus "fine" : k devient de plus en plus grand et les différences succéssives $h_i = t_{i+1} - t_i$ tendent vers 0 de manière *uniforme*. Par exemple, si on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intevalles de même longueur, n devennant de plus en plus grand : pour $0 \leqslant i \leqslant n$

$$t_i = a + (i-1)\frac{b-a}{n},\ h_i = (b-a)/n.$$

En particulier la longueur $\ell(L_n)$ devrait bien approximer la longueur de la courbe $\ell(\varphi([a, b]))$. C'est effet le cas : supposons qu'on ait choisit une subdivision en n intervalles de même longueur $h = (b-a)/n$. Pour $i = 1 \dots n$

$$\ell(\varphi([t_i, t_{i+1}])) \sim \ell([\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1})]) = \|\overrightarrow{\varphi(t_i)\varphi(t_{i+1})}\|$$

On a par la formule d'approximation linéaire (2.1)
$\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = h\varphi'(t_i) + h\vec{\varepsilon}(h)$ et donc

$$\ell(\varphi([t_i, t_{i+1}])) = h\|\varphi'(t_i)\| + Erreur$$

Sommant les différent termes on obtient que $\ell(\varphi([a, b]))$ est bien approximée par

$$\ell(\varphi([a, b])) \sim \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}\|\varphi'(a + (i-1)\frac{b-a}{n})\|.$$

On reconnait une somme de Riemann qui converge vers l'integrale

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \|\varphi'(a+(i-1)\frac{b-a}{n})\| \to \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

On en déduit donc la formule

$$\ell(\varphi([a,b])) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

3.2.1. *Exemple : segment de droite.*

$$\varphi(t) = ((1-t)x_A + tx_B, (1-t)y_A + ty_B, (1-t)z_A + tz_B).$$

On a

$$\varphi'(t) = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = \overrightarrow{BA}$$

et donc

$$\ell(\varphi([0,1])) = \int_0^1 \|\overrightarrow{BA}\| dt = \|\overrightarrow{BA}\|.$$

On retrouve donc la longueur attendue.

3.2.2. *Exemple : cercle.*

$$\varphi(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t), z_0)$$

et

$$\varphi'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t), 0).$$

Ainsi

$$\ell(\varphi([0,2\pi])) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R(\sin(t))^2 + (R\cos(t))^2 + 0^2} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

3.2.3. *Exemple : courbe contenue dans un graphe.*

$$\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))).$$

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

avec

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) = \nabla f(x(t), y(t)).(x'(t), y'(t)).$$

$$\ell(\varphi([a,b])) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

3.3. Propriétés de la longueur.

3.3.1. *Additivité par juxtaposition.* Soit

$$\varphi_1 : t \in [a,b] \mapsto (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$$

et

$$\varphi_2 : t \in [b,c] \mapsto (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$

deux courbes paramétrées telles que $\varphi_2(b) = \varphi_1(b)$; on forme une nouvelle courbe

$$\varphi_3 : [a,c] \mapsto \mathbf{R}^3$$

en posant $\varphi_3(t) = \varphi_1(t)$ si $a \leqslant t \leqslant b$ et $\varphi_3(t) = \varphi_2(t)$ si $b \leqslant t \leqslant c$. On a alors

$$\ell(\varphi_3([a,c])) = \ell(\varphi_3([a,b])) + \ell(\varphi_3([b,c])) = \ell(\varphi_1([a,b])) + \ell(\varphi_2([b,c])).$$

3.3.2. *Invariance par changement de paramètre.* Soit

$$\varphi : t \in [a,b] \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

une courbe paramétrée ; *un changement de paramètre* est une fonction dérivable

$$u : s \in [a', b'] \mapsto [a,b]$$

telle que

(1) u est strictement croissante
(2) $u(a') = a$ et $u(b') = b$.

Ainsi quand s varie entre a' et b' $u(s)$ parcourt donc l'intégralité du segment $[a,b]$. On obtient donc une nouvelle courbe paramétrée

$$\varphi_2 : s \in [a', b'] \mapsto \varphi_2(s) = \varphi(u(s))$$

avec la même courbe géométrique associée.

THÉORÈME 4.3. *La longueur ne change pas avec le changement de paramétrage :*

$$\ell(\varphi_2([a',b'])) = \int_{a'}^{b'} \|\varphi_2(s)\| ds = \int_a^b \|\varphi(t)\| dt = \ell(\varphi([a,b])).$$

Preuve: On a

$$\ell(\varphi_2([a',b'])) = \int_{a'}^{b'} \|\varphi_2(s)\| ds = \int_{a'}^{b'} \|\varphi_2'(u(s))\| ds$$

on a par dérivation des fonctions composées

$$\varphi_2'(u(s)) = u'(s)\varphi'(u(s)),\ \|\varphi_2'(u(s))\| = |u'(s)|\|\varphi'(u(s))\| = u'(s)\|\varphi'(u(s))\|$$

car $u'(s) \geqslant 0$ et donc

$$\ell(\varphi_2([a',b'])) = \int_{a'}^{b'} \|\varphi'(u(s))\| u'(s) ds.$$

On fait le changement de variable $t = u(s)$, $dt = u'(s)ds$ et donc comme $u(a') = a,\ u(b') = b$

$$\ell(\varphi_2([a',b'])) = \int_{a'}^{b'} \|\varphi'(u(s))\| u'(s) ds = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

□