Université de LAUSANNE

Faculté de Géosciences et Environnement

Examen Mathématiques II
le 18 juin 2012 - Durée 2h

- Les notes de cours ne sont pas autorisés.
- L'usage d'un livre formulaire (ou la photocopie d'une partie d'un livre formulaire) est autorisé. L'usage d'un formulaire sous forme manuscrite est autorisé : il devra porter exclusivement sur le cours et ne pas comporter plus de 3 feuilles RV. D'autre part un formulaire est fournit à la fin du sujet.
- L'usage d'une calculette simple (non-programmable et sans display graphique) est autorisée.
- Le sujet comporte 3 exercices.

Exercice 1. Soit $f(x, y)$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) Montrer que f est différentiable en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$.

(2) En remarquant que pour $X, Y \geq 0$, on a

$$X^2 \leq (X+Y)^2,\ Y^2 \leq (X+Y)^2,$$

démontrer que f est continue en $(0, 0)$.

(3) Montrer que le point $(-1, 1, 1)$ appartient au graphe de f et donner l'équation du plan tangent au graphe de f en ce point .

Exercice 2. Soit $D \subset \mathbf{R}^2$ le domaine

$$D = \{(x,y),\ x^2+y^2 < 9\}.$$

Soit f la fonction définie par

$$f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2+y^2-x^2y^2+1.$$

(1) Quelle est la nature géométrique de D ?

(2) Donner la liste des points critiques de f dans D. Parmi ces points, lesquels sont des points "selle" et lesquels sont des extrema locaux.

(3) S'il existe un ou des points selle, choisir l'un d'eux et donner l'équation (dans les coordonnées (x, y)) de ses droites caractéristiques

Exercice 3. Soit
$$f(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}.$$
On considère la courbe paramétrée
$$\begin{aligned}\phi : t \in [0,2\pi] \mapsto u(t) &= (x(t), y(t), z(t))\\ &= (\cos(t)^2, \cos(t)\sin(t), \sin(t))\end{aligned}$$
et $\mathcal{C}$ sa courbe géométrique associée.

(1) Montrer que pour tout t,
$$\|u(t)\| = (x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2)^{1/2} = 1.$$
En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement contenue dans une surface de niveau d'équation $f(x,y,z) = C$ avec C une constante que l'on précisera. Quelle est la nature de cette surface de niveau ?

(2) Calculer, pour tout t le vecteur vitesse $u'(t)$ et montrer que sa longueur vérifie :
$$\forall t \ \|u'(t)\|^2 + \sin^2(t) = C'$$
avec C' une constante que l'on calculera.

(3) Calculer les coordonnées du champ de vecteur $\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$; montrer que pour tout t, $u'(t)$ est perpendiculaire à $\vec{F}(u(t))$ (au moins deux méthodes sont possibles, en donner une).

(4) Calculer le travail de $\vec{F}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.

(5) Soit $\vec{G}$ le champ de vecteurs $\vec{G}(x,y,z) = (y, 1, xz)$. Calculer le travail de $\vec{G}$ le long de $\mathcal{C}$. Le champ $\vec{G}$ est il conservatif ?