CHAPITRE 1

Fonctions de plusieurs variables : continuité

1. Introduction, motivation

2. Notions concernant les vecteurs et l'algèbre linéaire

Etant donné $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\vec{x}' = (x'_1, \cdots, x'_n)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Les nombres réels $x_i, x'_i,\ i = 1, \cdots, n$ sont les *coordonnées* de ces vecteurs ; on rappelle les opérations et notations suivantes

- **Le vecteur nul** : $\vec{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbf{R}^n$
- **Somme** :
$$\vec{x} + \vec{x}' = (x_1 + x'_1, \cdots, x_n + x'_n) \in \mathbf{R}^n,$$
- **Multiplication par un scalaire** : pour $\lambda \in \mathbf{R}$,
$$\lambda.\vec{x} = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n).$$
- **Produite scalaire** :
$$\vec{x}.\vec{x}' = x_1 x'_1 + \cdots x_n x'_n \in \mathbf{R}.$$

Ce dernier vérifie

(1) **Linéarité** : $(\vec{x} + \vec{x}').\vec{x}'' = \vec{x}.\vec{x}'' + \vec{x}'.\vec{x}''$, $(\lambda\vec{x}).\vec{x}' = \lambda(\vec{x}.\vec{x}')$.

(2) **Symétrie** : $\vec{x}.\vec{x}' = \vec{x}'.\vec{x}$.

(3) **Longueur euclidienne** :
$$(\vec{x}.\vec{x})^{1/2} = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} = \|\vec{x}\|_2$$

(4) **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : pour $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbf{R}^n$ on a
$$|\vec{x}.\vec{x}'| \leqslant \|\vec{x}\|_2 \|\vec{x}'\|_2$$
et l'égalité à lieu si et seulement si $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ sont colinéaires (si $\vec{x} \neq \vec{0}$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{x}' = \lambda\vec{x}$).

(5) **Angle de deux vecteurs**. si $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ sont non-nuls, on défini leur l'angle $\theta \in [0, \pi]$ comme l'unique solution (dans $[0, \pi]$) de léquation
$$\vec{x}.\vec{x}' = \cos(\theta)\|\vec{x}\|_2\|\vec{x}'\|_2$$
(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on sait que $\vec{x}.\vec{x}'/|\vec{x}\|_2\|\vec{x}'\|_2 \in [-1, 1]$).

2.1. Hyperplan.

DÉFINITION 1.1. *Un hyperplan de* $\mathbf{R}^n$ *est un sous-ensemble de vecteur* $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ *vérifiant une équation de la forme*

$$Eq(\vec{a}, b) : \ \vec{a}.\vec{x} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

pour $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n - \{\vec{0}\}$ *un vecteur non-nul et* $b \in \mathbf{R}$ *un scalaire. On note cet ensemble*

$$Hyp(\vec{a}, b) = \{\in \mathbf{R}^n, \ \vec{a}.\vec{x} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\}.$$

Si $b = 0$*, l'hyperplan est dit vectoriel (et est affine en général).*

Notons que pour un hyperplan vectoriel, l'équation

$$\vec{a}.\vec{x} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

s'interprete en disant que tout vecteur $\vec{x}$ de cet hyperplan est *perpendiculaire* au vecteur $\vec{a}$. On dira aussi que $\vec{a}$ est un *vecteur normal à l'hyperplan* $Hyp(\vec{a}, 0)$.

On vérifie facilement la

PROPOSITION 1.1. *Un hyperplan vectoriel est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^n$ *:*

(1) $\vec{0} \in Hyp(\vec{a}, 0)$.
(2) *Pour* $\vec{x} \in Hyp(\vec{a}, 0)$ *et* $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda\vec{x} \in Hyp(\vec{a}, 0)$.
(3) *Pour* $\vec{x}, \vec{x}' \in Hyp(\vec{a}, 0)$, $\vec{x} + \vec{x}' \in Hyp(\vec{a}, 0)$

PROPOSITION 1.2. *Un hyperplan affine est l'image d'un hyperplan vectoriel par une translation.*

Preuve: Comme $\vec{a}$ est non-nul, il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $a_i \neq 0$. Soit $\vec{x}_b$ le vecteur dont la i-ième coordonnée vaut b/a_i et toutes les autres sont nulles. On voit facilement que $\vec{x}_b \in Hyp(\vec{a}, b)$ et que pour tout $\vec{x} \in Hyp(\vec{a}, b)$ la différence $\vec{x} - \vec{x}_b$ appartient à l'hyperplan vectoriel $Hyp(\vec{a}, 0)$. En d'autres termes

$$Hyp(\vec{a}, b) = Hyp(\vec{a}, 0) + \vec{x}_b.$$

□

3. Graphes et variétés de niveau

Soit $D \subset \mathbf{R}^n$ un sous ensemble de $\mathbf{R}^n$ et

$$f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbf{R} \\ \vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) & \to & f(x_1, \cdots x_n) \end{array}$$

une fonction sur D à valeurs réelles. L'ensemble D (noté aussi D_f) est le *domaine de définition* de f.

Pour essayer de représenter f on associe à des sous-ensembles de $\mathbf{R}^{n+1}$ et $\mathbf{R}^n$ appellés le graphe et les variétés de niveau de f

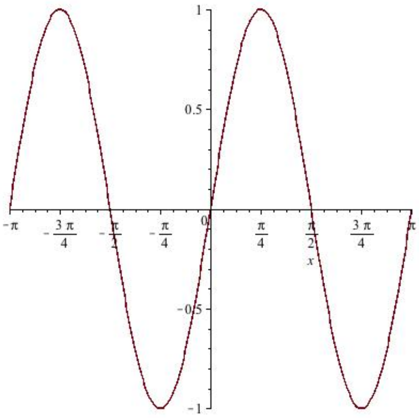


FIGURE 1. Graphe de $f(x) = \sin(2x)$

3.1. Graphe d'une fonction.

DÉFINITION 1.2. *Le graphe de f noté $\mathcal{G}_f$ est le sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n+1}$*

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_f &= \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}),\ (x_1, \cdots, x_n) \in D_f,\ x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n)\} \\ &= \{(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)),\ (x_1, \cdots, x_n) \in D_f\} \subset \mathbf{R}^{n+1}\end{aligned}$$

- Si $n = 1$, $\mathcal{G}_f \subset \mathbf{R}^2$ n'est autre que le graphe habituel d'une fonction d'une variable.
- Si $n = 2$ et qu'on represente les coordonnés de $\mathbf{R}^3$ par (x, y, z), le graphe de $f : (x, y) \to f(x, y)$ est l'ensemble des points de la forme

  $$\mathcal{G}_f = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in D_f\} \subset \mathbf{R}^3.$$

  Graphiquement il s'agit d'un surface qui quand on la projette sur le plat horizontal (des (x, y)) redonne le domaine de définition D_f.
- Pour $n \geqslant 3$ le graphe de f est un objet de $\mathbf{R}^{n+1}$ qui est difficile de representer sur un tableau ou un ecran.

3.2. Variétés de niveau. Une autre manière d'appréhender une fonction est de considérer ses varités de niveau qui sont cette fois des sous-ensemble de $\mathbf{R}$ (donc plus faciles à représenter).

DÉFINITION 1.3. *Soit $f : D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction et C une constante, la variété de niveau C est le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$*

$$V_f(C) = \{\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n),\ t.q.\ f(x_1, \cdots, x_n) = C\}.$$

Notons que variété de niveau peut être vide : si C n'appartient pas a l'image de f, $f(D_f)$.

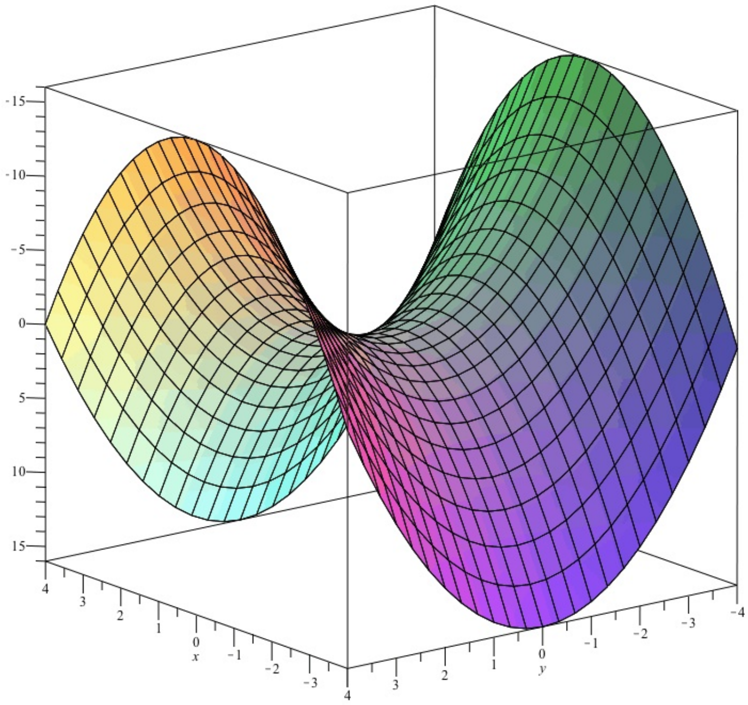


FIGURE 2. Graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$

4. Approximation et continuité

Dans ce cours on va chercher à décrire une fonction $\vec{x} \to f(\vec{x})$ quand la variable $\vec{x}$ est "proche" d'un point $\vec{x}_0 = (x_{0,1}, \cdots, x_{0,n})$. On va montrer que souvent dans ce cas f est "proche" d'une fonction g qui est une somme de fonctions "simples" à étudier.

4.1. Fonctions de base. Les fonctions simples qu'on va rencontrer sont essentiellement de trois types

(1) Les fonctions constantes, $f : \vec{x} \to Cst$ où Cst est une constante (ie. qui ne dépend pas de $\vec{x}$).

(2) Les fonctions linéaires ; une fonction f est linéaire si elle est de la forme

$$L : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \cdots a_n x_n$$

avec $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ un vecteur fixe. Les fonctions linéaires satisfont

- $L(\vec{0}) = 0$,
- $L(\vec{x} + \vec{x}') = L(\vec{x}) + L(\vec{x}')$,
- $L(\lambda.\vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$.

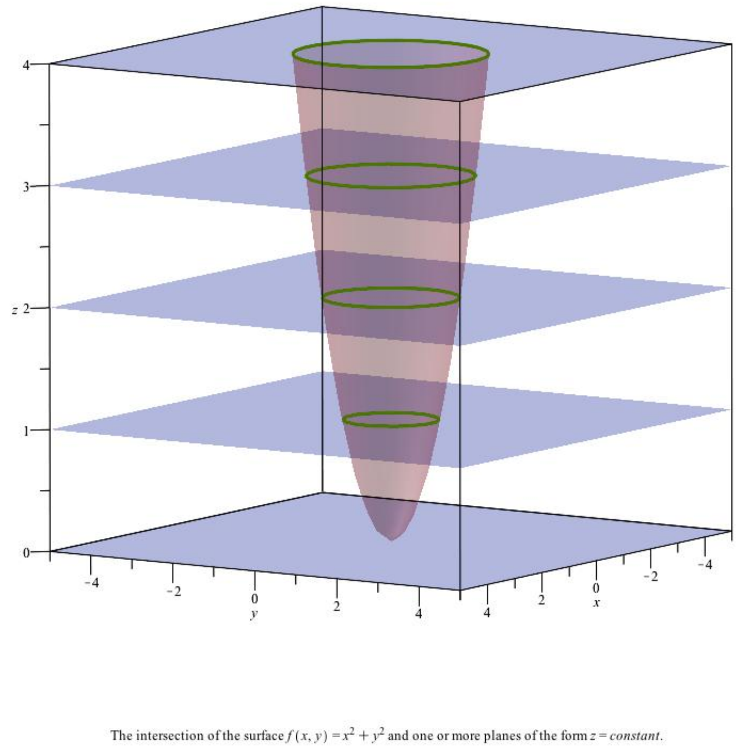


FIGURE 3. Courbes de niveau de $f(x,y) = x^2 + y^2$

(3) Les fonctions homogènes quadratiques : les fonctions de la forme

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

avec $a_{ij},\ i = 1..n, j = 1..n$ des nombres réels fixes.

La somme d'un fonction constante et d'une fonction linéaire sera appelée une fonction *affine* et la somme d'une fonction affine et d'une fonction homogène quadratique sera appelée fonction quadratique ou fonction polynomiale de degré 2.

On doit aussi quantifier la notion d'être "proche". Pour cela on introduit la notion de

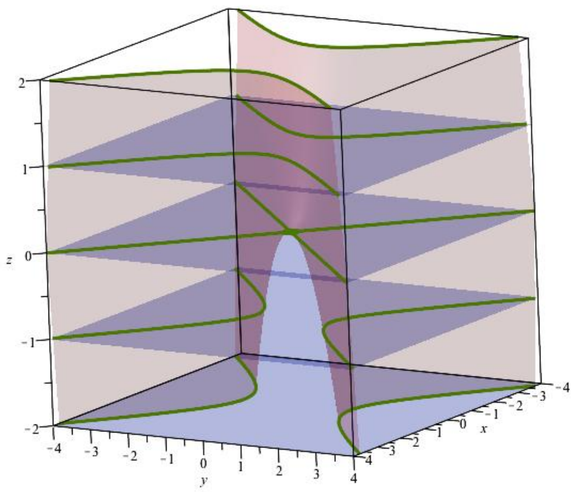
4.2. Normes sur $\mathbf{R}^n$. Soit x et x_0 deux nombres réels ; ils sont "proches" si leur distance

$$|x - x_0|$$

est petite.

Soient maintenant deux vecteurs

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n),\ \vec{x}_0 = (x_{0,1}, \cdots, x_{0,n}) \in \mathbf{R}^n.$$



The intersection of the surface $f(x, y) = x^2 - y^2$ and one or more planes of the form $z = constant$.

FIGURE 4. Courbes de niveau de $f(x, y) = x^2 - y^2$

On dira que deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{x}_0$ sont proches si chacune des coordonnées de l'un est proche de la coordonnée correspondante : x_1 est proche de $x_{0,1}$,..., x_n est proche de $x_{0,n}$, ou encore posant

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = (x_1 - x_{0,1}, \cdots, x_n - x_{0,n}) = \vec{h} = (h_1, \cdots, h_n),$$

si chacune des coordonnées h_i est petite. On mesure la taille d'un vecteur par une *norme* : des exemples de normes sont

(1) La norme euclidienne : $\|\vec{h}\|_2 = (h_1^2 + \cdots + h_n^2)^{1/2}$,

(2) La norme L_1 :$\|\vec{h}\|_1 = |h_1| + \cdots + |h_n|$,

(3) La norme sup : $\|\vec{h}\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} |h_i|$.

Il est clair que si $\|\vec{h}\|_1$ ou $\|\vec{h}\|_2$ ou $\|\vec{h}\|_\infty$ est petit alors chacune des coordonnées de $\vec{h}$ est petite. On a en effet

$$\|\vec{h}\|_\infty \leqslant \|\vec{h}\|_2 \leqslant \|\vec{h}\|_1 \leqslant n\|\vec{h}\|_\infty.$$

Il y a beaucoup d'autres normes possible, mais toutes ont des propriétés communes :

(1) $\|\vec{h}\| = 0$ si et seulement si $\vec{h} = \vec{0}$,

(2) $\|\lambda.\vec{h}\| = |\lambda|\|\vec{h}\|$.

(3) (inégalité triangulaire) $\|\vec{h} + \vec{h}'\| \leqslant \|\vec{h}\| + \|\vec{h}'\|$.

4.3. Continuité. On rappelle que

DÉFINITION 1.4. *Une fonction $f : D_f \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ d'une variable définie sur un domaine $D_f \subset \mathbf{R}$ est continue en un point $x_0 \in D_f$ si, quand x tend vers x_0, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$; c'est d́ire si étant donné une suite numérique $(x_k)_k$ qui tend vers x_0, la suite numérique $(f(x_k))_k$ tend vers $f(x_0)$.*

On note cela

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \text{ ou } f(x) \to f(x_0) \text{ quand } x \to x_0.$$

On va étendre cette définition aux fonctions de plusieurs variables.

DÉFINITION 1.5. *Une suite de vecteurs*

$$(\vec{x}_k)_k = (x_{k,1}, \cdots, x_{k,n})_k$$

tend vers un vecteur $\vec{x}_0 = (x_{0,1}, \cdots, x_{0,n})$ et on le note

$$\lim_{k \to \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0, \text{ ou } \vec{x}_k \to \vec{x}_0, \ k \to +\infty,$$

si pour une norme donnée la suite numérique $(\|\vec{x}_k - \vec{x}_0\|)_k$ tend vers 0 ; de manière équivalente, si pour tout $i = 1, \cdots, n$, la suite numérique $(x_{k,i})_k$ tend vers $x_{0,i}$.

On rep'ete alors la définition de la continuité :

DÉFINITION 1.6. *Une fonction $f : D_f \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de n variables définie sur un domaine $D_f \subset \mathbf{R}^n$ est continue en un point $\vec{x}_0 \in D_f$ si, quand $\vec{x}$ tend vers $\vec{x}_0$, $f(\vec{x})$ tend vers $f(\vec{x}_0)$; c'est d́ire, si pour tout suite de vecteurs $(\vec{x}_k)_k$ tendant vers $\vec{x}_0$, la suite numérique $(f(\vec{x}_k))_k$ tend vers $f(\vec{x}_0)$.*

On note cela

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0), \text{ ou } f(\vec{x}) \to f(\vec{x}_0) \text{ quand } \vec{x} \to \vec{x}_0.$$

4.4. Le mécano de la continuité. On va voir qu'il est tr'es facile de fabriquer des fonctions continues :

- Les fonctions constantes sont continues
- Pour $i = 1, ..., n$ les fonctions coordonnées

  $$x_i : \vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mapsto x_i$$

  sont continues en tout point de $\mathbf{R}^n$.
- Si f et g sont continues en $\vec{x}_0$ alors $f + g : \vec{x} \to f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ est continue en $\vec{x}_0$.
- Si f et g sont continues en $\vec{x}_0$ alors $f.g : \vec{x} \to f(\vec{x})g(\vec{x})$ est continue en $\vec{x}_0$.
- Si f et g sont continues en $\vec{x}_0$ alors $f/g : \vec{x} \to f(\vec{x})/g(\vec{x})$ est continue en $\vec{x}_0$ si $g(\vec{x}_0) \neq 0$.
- Si f est continue en $\vec{x}_0$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction d'une variable qui est définie et continue au point $f(\vec{x}_0)$ alors la fonction composée

  $$g \circ f : \vec{x} \mapsto g(f(\vec{x}))$$

  est continue en $\vec{x}_0$.

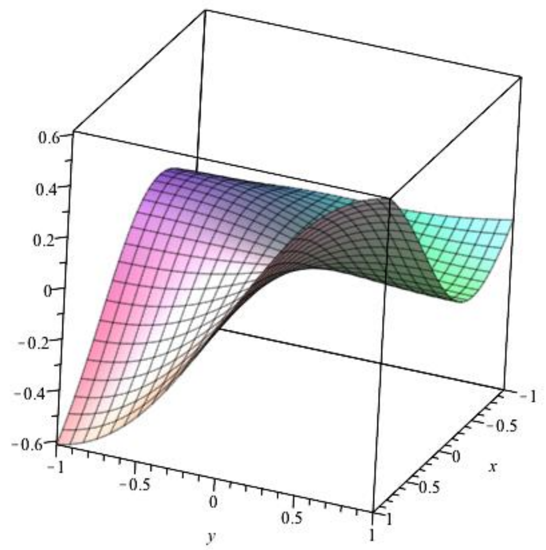


FIGURE 5. graphe de $f(x, y) = \frac{\sin(xy)+x^2y}{x^2+y^2+1}$

EXEMPLE 4.4.1. La fonction

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \frac{\sin(xy) + x^2y}{1 + x^2 + y^2}$$

est continue sur $\mathbf{R}^2$. En effet le numérateur de f est somme d'un produit de fonctions continues et de la composée d'une fonction continue ($(x, y) \to xy$) sur $\mathbf{R}^2$et d'une fonction d'une variable également continue sur $\mathbf{R}$ (sin) ; sont dénominateur est continu et ne s'annule jamias sur $\mathbf{R}^2$ (car $x^2 + y^2 + 1 \geqslant 1$).

EXEMPLE 4.4.2. En revanche la fonction définie par

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)+x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ (par le même raisonnement que dans l'exemple précédent) mais PAS en $(0, 0)$. Il suffit pour cela de montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) \neq f(0, 0) = 0.$$

Considérons pour cela la suite

$$\vec{x}_n = (x_n, y_n) = (1/n, 1/n).$$

cette suite tend vers $(0, 0)$ mais

$$f(x_n, x_n) = \frac{\sin(1/n^2) + 1/n^3}{2/n^2} = \frac{\sin(1/n^2)}{2/n^2} + \frac{1}{2n}.$$

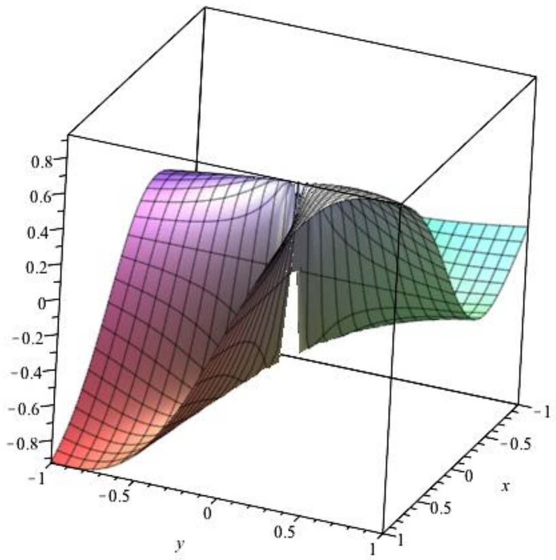


FIGURE 6. graphe de $f(x,y) = \frac{\sin(xy)+x^2y}{x^2+y^2}$

Le second terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$ alors que le premier a pour limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n^2)}{2/n^2} = \lim_{X\to 0} \frac{\sin(X)}{2X} = \frac{1}{2}.$$

Et donc

$$\lim_{n\to\infty} f(1/n, 1/n) = 1/2 \neq 0.$$

Ntons que si $f(0,0)$ avait été défini comme étant $1/2$ (au lieu de 0) one aurait encore une fonction non-continue. Il suffirait de considérer la suite

$$\vec{x}'_n = (x_n, y_n) = (1/n, 0)$$

car alors

$$\lim_{n\to\infty} f(0, 1/n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(0)+0}{0+(1/n)^2} = 0 \neq 1/2.$$