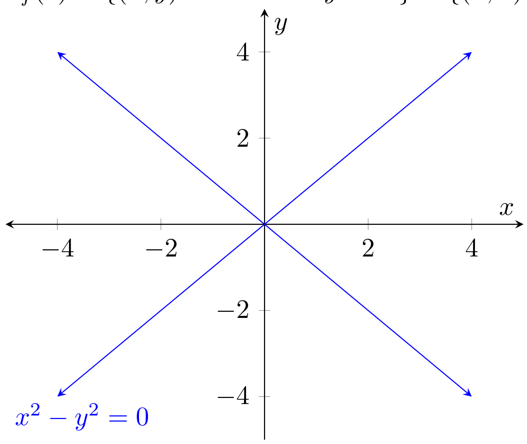
MATHGEO-2013-SOL2

(1) (a) $V_f(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\} = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$:



(b) L'homothéthie de rapport t d'un ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$ est l'ensemble $tS = \{(tx, ty) : (x,y) \in S\}$. Soit $\varepsilon = \pm 1$, et supposons que $\varepsilon\lambda > 0$. Posons $t = \sqrt{\varepsilon\lambda} > 0$, puis $t^2 = \varepsilon\lambda$. Nous devons vérifier que

$$V_f(\lambda) = tV_f(\varepsilon),$$

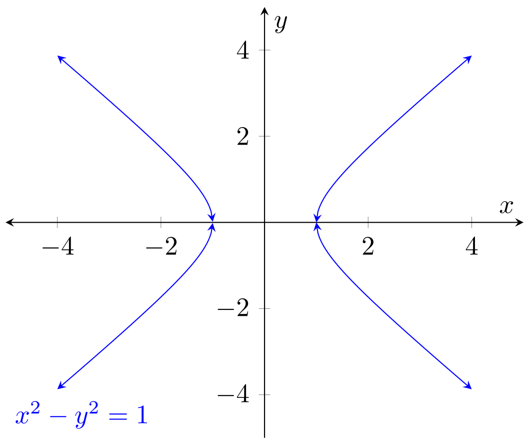
ou autrement dit, que

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\} = \{(tx,ty) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \varepsilon\}.$$

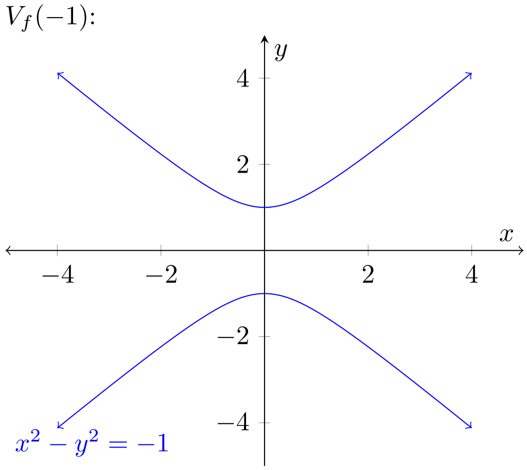
On note S_1 l'ensemble sur le droit et S_2 l'ensemble sur le gauche.
Nous vérifions que $S_1 \subset S_2$: Soit $(x,y) \in S_1$, puis $f(x,y) = x^2 - y^2 = \lambda$. Posons $X = x/t$, $Y = y/t$, alors $f(X,Y) = X^2 - Y^2 = (x/t)^2 - (y/t)^2 = \frac{x^2-y^2}{\varepsilon\lambda} = 1/\varepsilon = \varepsilon$, donc $(x,y) = (tX,tY) \in S^2$. Nous concluons que $S_1 \subset S_2$.
Inversement, nous vérifions que $S_2 \subset S_1$: Soit $(x,y) \in S_2$, puis il existe $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(X,Y) = X^2 - Y^2 = \varepsilon$, $x = tX$ et $y = tY$. Alors $f(x,y) = (tX)^2 - (tY)^2 = \varepsilon\lambda(X^2 - Y^2) = \varepsilon^2\lambda = \lambda$, donc $(x,y) \in S_1$. Nous concluons que $S_2 \subset S_1$.
Puisque $S_1 \subset S_2$ et $S_2 \subset S_1$, on en déduit que $S_1 = S_2$.

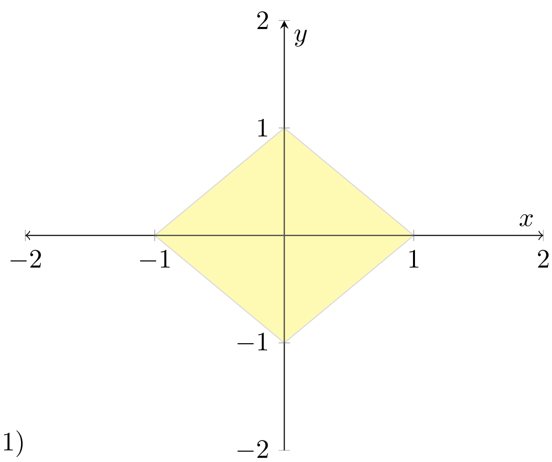
(c) C'est le cas $\varepsilon = -1$ ci-dessus.

(d) $V_f(1)$:

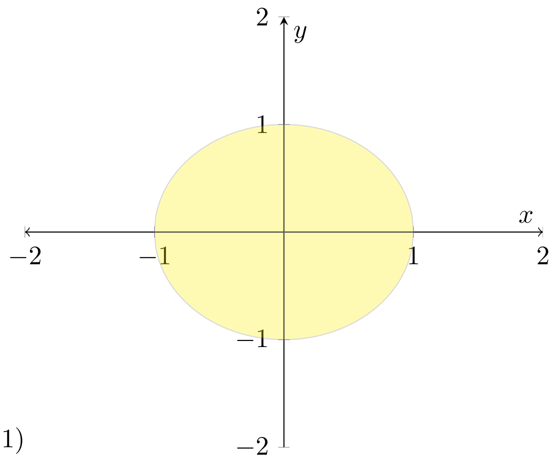


$V_f(-1)$:

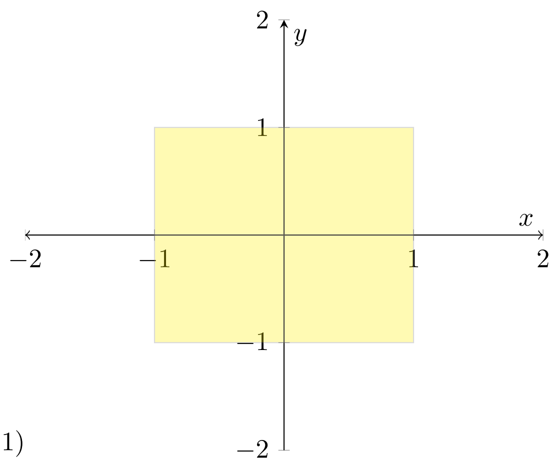




(2) (a) $B_1(\vec{0}, 1)$



$B_2(\vec{0}, 1)$



$B_\infty(\vec{0}, 1)$

(b) C'est le cas $n = 2$ ci-dessous.

(3) Soit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Nous devons vérifier que $\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_1 \leq n\|\vec{x}\|_\infty$, c'est à dire, que

$$\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} \leq |x_1| + \cdots + |x_n| \leq n \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Pour la première inégalité, puisque la fonction $\mathbb{R}_{\geq 0} \ni t \mapsto t^2$ est strictement croissante, on a

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \sqrt{\max\{x_1^2, \dots, x_n^2\}} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \|\vec{x}\|_2.$$

Pour la deuxième inégalité, si on développe le carré $(|x_1| + \cdots + |x_n|)^2$, on obtient la somme de la contribution "diagonale" $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$ et les termes non négatifs $|x_i x_j|$ pour chaque $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$, donc

$$\|\vec{x}\|_1^2 = (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2 \geq |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = \|\vec{x}\|_2^2.$$

On en déduit que $\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_1$. Pour la troisième inégalité, on a $|x_i| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \|\vec{x}\|_\infty$ pour chaque i, donc

$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \leq \|\vec{x}\|_\infty + \cdots + \|\vec{x}\|_\infty = n\|\vec{x}\|_\infty.$$