MATHGEO-2013-SOL6

(1) (a) Soit $g = x^4 + x^2y^2 + y^4$. La semaine dernière, nous avons vu que le seul point critique est $(0,0)$ et que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x} = 12x^2 + 2y^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 4xy, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 4xy, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y} = 12y^2 + 2x^2,$$

Au point $(x,y) = (0,0)$, ils sont tous zéro. Alors la hessian est zéro; c'est un point dégénéré.

(b) Soit $h = x^4 - y^4 + 1$. La semaine dernière, nous avons vu que le seul point critique est $(0,0)$ et que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial^2 y} = -12y^2.$$

Au point $(x,y) = (0,0)$, ils sont tous zéro. Alors la hessian est zéro; c'est un point dégénéré.

(2) (a) Soit $f = 2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 8y + 1$. Alors $\nabla f = (4x + 4y + 4, 4x + 6y + 8)$. Si $\nabla f(x,y) = 0$, alors

$$0 = (4x + 6y + 8) - (4x + 4y + 4) = 2y + 4,$$

donc $y = -2$ et $x = -(6y + 8)/4 = 1$. Inversement, $\nabla f(1,-2) = 0$. On en déduit que le seul point critique est $P = (1,-2)$. Nous calculons que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{Hess}(f)(P) = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 6 = -8 < 0$. Puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(P) = 4 > 0$, nous voyons que P est un minimum local de f.

(b) Soit $f = x^2 - 4xy + 3y^2 - 6x + 12y - 1$. Alors

$$\nabla f = (2x - 4y - 6, -4x + 6y + 12).$$

Si $\nabla f(x,y) = 0$, alors

$$0 = 2(2x - 4y - 6) + (-4x + 6y + 12) = -2y,$$

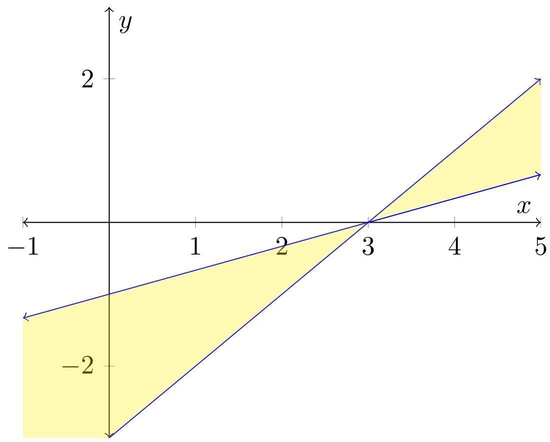
donc $y = 0$ et $x = (4y + 6)/2 = 3$. Inversement, $\nabla f(3,0) = 0$. On en déduit que le seul point critique est $P = (3,0)$. Nous calculons que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{Hess}(f)(P) = (-4) \cdot (-4) - 2 \cdot 6 = 4 > 0$. Donc P est un point col de f. Les droites caractéristiques sont définies par l'équation (avec $X = x - 3$, $Y = y - 0$)

$$0 = (X, Y) \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 2X^2 - 8XY + 6Y^2 = 2(X - 3Y)(X - Y),$$

c'est à dire, par $y = x - 3$ ou $3y = x - 3$:



Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(3,0) = 2 > 0$, les signes du term quadratique sont negatifs dans les régions jaunes.

(c) Soit $f = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$. Alors $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3, 3y^2 - 12)$. On a $\nabla f(x,y) = 0$ quand $x = \pm 1$ et $y = \pm 2$ (quatre points). On calcule que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

Aux quatre points $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (-1,2)$, $P_3 = (1,-2)$, $P_4 = (-1,-2)$, ce qui prècéde est respectivement

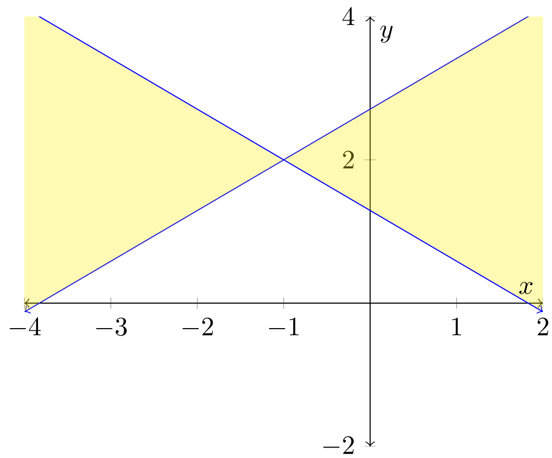
$$\begin{pmatrix} 6 & \\ & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & \\ & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & \\ & -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & \\ & -12 \end{pmatrix}.$$

(i) On a $\mathrm{Hess}(f)(P_1) = -72 < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} > 0$, donc c'est un minimum local.

(ii) On a $\mathrm{Hess}(f)(P_2) = 72 > 0$, donc c'est un point col. Autour du point $P_2 = (-1,2)$, les droites caractéristiques de f sont définies par l'équation (avec $X = x - (-1)$, $Y = y - 2$)

$$0 = (X,Y)\begin{pmatrix} -6 & \\ & 12 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = -6X^2 + 12Y^2 = -6(X - \sqrt{2}Y)(X + \sqrt{2}Y),$$

c'est à dire, par $x + 1 = \sqrt{2}(y-2)$ ou $x + 1 = -\sqrt{2}(y-2)$, ou équivalente, par $y = 2 + (x+1)/\sqrt{2}$ ou $y = 2 - (x+1)/\sqrt{2}$:

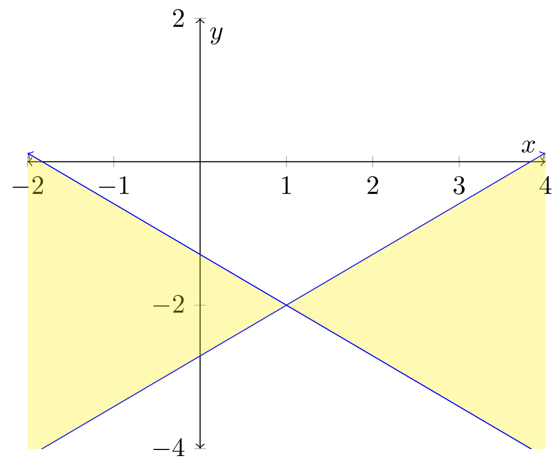


Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(P_2) = -6 < 0$, les signes du term quadratique sont negatifs dans les régions jaunes.

(iii) On a $\mathrm{Hess}(f)(P_3) = 72 > 0$, donc c'est un point col. Autour du point $P_3 = (1, -2)$, les droites caractéristiques de f sont définies par l'équation (avec $X = x - 1$, $Y = y - (-2)$)

$$0 = (X, Y)\begin{pmatrix} 6 & \\ & -12 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 6X^2 - 12Y^2 = 6(X - \sqrt{2}Y)(X + \sqrt{2}Y),$$

c'est à dire, par $x - 1 = \sqrt{2}(y + 2)$ ou $x - 1 = -\sqrt{2}(y + 2)$, ou équivalente, par $y = -2 + (x - 1)/\sqrt{2}$ ou $y = -2 - (x - 1)/\sqrt{2}$:



Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(P_2) = 6 > 0$, les signes du term quadratique sont positifs dans les régions jaunes.

(iv) On a $\mathrm{Hess}(f)(P_4) = -72 < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} < 0$, donc c'est un maximum local.

(3) Soit $f = 1 + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - y^3$. Alors

$$\nabla f = (2x + 2y + 3x^2, 2x + 2y - 3y^2).$$

Si $\nabla f(x, y) = 0$, alors

$$0 = (2x + 2y + 3x^2) - (2x + 2y - 3y^2) = 3(x^2 + y^2),$$

donc $(x, y) = (0, 0)$. Inversement, $\nabla f(0, 0) = 0$. On en déduit que le seul point critique est $P = (0, 0)$. En général, on a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 6x & 2 \\ 2 & 2 - 6y \end{pmatrix}.$$

Au point P, on en déduit que $\mathrm{Hess}(f)(P) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$, donc c'est un point dégénéré. Le terme quadratique de f au voisinage de P est

$$\frac{1}{2}(x, y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2,$$

donc le graphe de f au voisinage de ce point a une forme de vallèe dont les lignes de niveau sont approximativement celles de la fonction parabolique $(x+y)^2$; autrement dit, les directions de croissance maximale sont donnés par les vecteurs $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.