MATHGEO-2013-SOL6

(1) Soit $f = \sin x - y$.

(a) On calcule $\nabla f = (\cos x, -2y)$ et

$$Q(f) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x & \\ & -2 \end{pmatrix}.$$

On a $\nabla f = 0$ si et seulement si $y = 0$ et $x = \pi/2 + \pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$; dans ce cas,

$$Q(f) = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -2 \end{pmatrix}$$

si n est paire, et

$$Q(f) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -2 \end{pmatrix}$$

si n est impaire. Donc f a comme maximums relatifs $(\pi/2+2\pi n, 0)$ et points cols $(3\pi/2+2\pi n, 0)$ $(n \in \mathbb{Z})$.

(b) Le plan tangent au graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ au point (x_0, y_0, z_0) (avec $z_0 = f(x_0, y_0)$) est definie par l'equation $(x, y, z) \cdot n = (x_0, y_0, z_0) \cdot n$, où

$$n = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0), -1 \right).$$

On calcule

$$n = (\cos x_0, -2y_0, -1).$$

Il est parallèle à l'axe Oy quand $n \cdot (0, 1, 0) = 0$, c'est-à-dire, quand $y_0 = 0$.

(c) Nous avons vu ci-dessus que f n'a pas de points d'extremum relatif dans l'intérieur de la région D. Sur le bord de cette région, on calcule que

- $f(x, \pm 1) = \sin x - 1$ (avec $x \in [0, \pi/2]$) a un minimum relatif au point $x = 0$ de valeur -1, et un maximum relatif au point $x = \pi/2$ de valeur 0;
- $f(\pi/2, y) = 1 - y^2$ (avec $y \in [-1, 1]$) a des minimums relatifs aux points $y = \pm 1$ de valeur 0, et un maximum relatif au point $y = 0$ de valeur 1;
- $f(0, y) = -y^2$ a des minimums relatifs aux points $y = \pm 1$ de valeur -1, et un maximum relatif au point $y = 0$ de valeur 0.

Nous avons trouvé les points d'extremum relatif de la restriction de f au bord de D. Maintenant, nous devons déterminer lequel de ces points sont points d'extremum relatif de f sur D tout entier.

- $(0, -1)$ est un minimum relatif de f sur D: On a $f(0, -1) = -1$ et, pour $\varepsilon_1 \geq 0$ et $\varepsilon_2 \geq 0$, on a $f(\varepsilon_1, -1 + \varepsilon_2) - f(0, -1) = \sin(\varepsilon_1) - (-1 + \varepsilon_2)^2 + 1 = \sin(\varepsilon_1) + \varepsilon_2(2 - \varepsilon_2)$, ce qui est non négatif lorsque $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont suffisamment petites (par example, lorsque $\varepsilon_1 \leq \pi$ et $\varepsilon_2 \leq 2$). De la même manière, on verifie que $f(0, 1)$ est un minimum relatif de f sur D.
- Nous avons vu que $(\pi/2, 0)$ est un maximum relatif de f sur tout le plan $\mathbb{R}^2$, et en particulier, sur D.
- Les points $(0, 0), (\pi/2, -1)$ et $(\pi/2, 1)$ ne sont pas points d'extremum relatif de f sur D:
  - On a $f(\varepsilon, 0) - f(0, 0) = \sin(\varepsilon)$ et $f(0, \varepsilon) - f(0, 0) = -\varepsilon^2$, qui ont des signes différents pour petit ε.

– On a $f(\pi/2-\varepsilon,-1)-f(\pi/2,-1)=\cos(\varepsilon)-1$ et $f(\pi/2,-1+\varepsilon)-f(\pi/2,-1)=\varepsilon(2-\varepsilon)$, qui ont des signes différents pour petit ε.
– On a $f(\pi/2-\varepsilon,1)-f(\pi/2,1)=\cos(\varepsilon)-1$ et $f(\pi/2,1-\varepsilon)-f(\pi/2,1)=\varepsilon(2-\varepsilon)$, qui ont des signes différents pour petit ε.

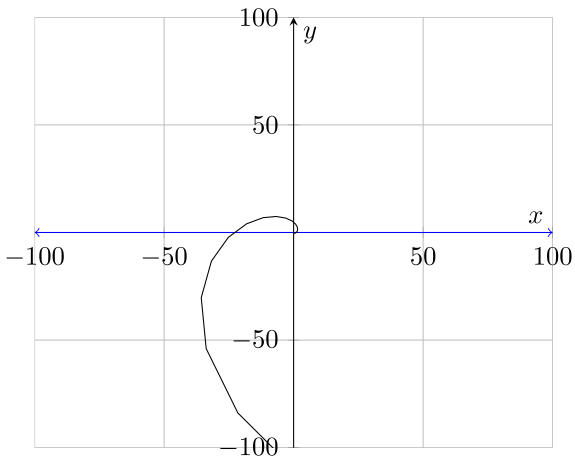
(2) Soit $f=x^4+2y^2-4xy$ sur $D=\{(x,y):-1\leq x\leq 1,-1\leq y\leq 1\}$. On a $\nabla f(x,y)=4(x^3-y,y-x)$.
(a) $\nabla_{(1,1)}f(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot(1,1)=4((x^3-y)+(y-x))=4(x^3-x)$.
(b) On a $\nabla f(x,y)=0$ seulement si $x^3=y$ et $y=x$, ou de manière équivalente,

$$(x,y)\in\{(0,0),(1,1),(-1,-1)\}.$$

Donc il n'y a pas de points d'extremum relatif dans l'intérieur de D.
(c) Sur le bord de D, on a:
- $f(x,-1)=x^4+4x+2$, $\frac{d}{dx}f(x,-1)=4(x^3+1)$ qui $=0$ seulement si $x=-1$;
- $f(1,y)=2y^2-4y+1$, $\frac{d}{dy}f(1,y)=4(y-1)$, qui $=0$ seulement si $y=1$;
- $f(x,1)=x^4-4x+2$, $\frac{d}{dx}f(x,1)=4(x^3-1)$, qui $=0$ seulement si $x=1$;
- $f(-1,y)=2y^2+4y+1$, $\frac{d}{dy}f(-1,y)=4(y+1)$, qui $=0$ seulement si $y=-1$.

Donc tout les extremums relatifs de f sur D tour entier sont situés dans $\{(\pm1,\pm1)\}$. On a $f(-1,-1)=f(1,1)=-1$ (minimum) et $f(-1,1)=f(1,-1)=7$ (maximum).

(3) Soit $\varphi(t)=(e^t\cos t,e^t\sin t)$. On a $\varphi'(t)=(e^t(\cos t-\sin t),e^t(\sin t+\cos t))$.

(a) 

(c) On a $\|\varphi'(t)\|^2=e^{2t}((\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2)=e^{2t}(2\cos^2 t+2\sin^2 t)=2e^{2t}$, donc $\|\varphi'(t)\|=\sqrt{2}e^t$.
(b) En chaque point $P=\varphi(t)$, cette spirale coupe la droite OP avec l'angle θ, où

$$\cos\theta=\frac{\varphi(t)\cdot\varphi'(t)}{\|\varphi(t)\|\|\varphi'(t)\|}.$$

On a $\|\varphi(t)\|=e^t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=e^t$ et

$$\varphi(t)\cdot\varphi'(t)=e^{2t}(c(c-s)+s(s+c))=e^{2t}(c^2+s^2)=e^{2t},$$

où nous avons écrit $c=\cos t, s=\sin t$. Donc $\theta=\arccos(1/\sqrt{2})$ est indépendant de t.