UNIL - Faculté des géosciences et de l'environnement — Printemps 2013
Cours de Mathématiques II

Série 2

Exercice 1. Soit $f(x,y) = x^2 - y^2$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit

$$V_f(\lambda) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \lambda\}$$

la variété de niveau λ.

1. Représenter graphiquement $V_f(0)$.
2. Montrer que si $\lambda > 0$, $V_f(\lambda)$ est obtenue à partir de $V_f(1)$ par une homothéthie de rapport $\sqrt{\lambda}$.
3. Montrer que si $\lambda < 0$, $V_f(\lambda)$ est obtenue à partir de $V_f(-1)$ par une homothéthie de rapport $\sqrt{-\lambda}$.
4. Représenter graphiquement $V_f(\pm 1)$.

Exercice 2. Pour $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on considère les trois normes

$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|,\ \|\vec{x}\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ \|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

1. Dessinez les ensembles

$$B_1(\vec{0},1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|x\|_1 \leqslant 1\},$$
$$B_2(\vec{0},1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|x\|_2 \leqslant 1\},$$
$$B_\infty(\vec{0},1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|x\|_\infty \leqslant 1\}.$$

2. Montrez que $\|\vec{x}\|_\infty \leqslant \|\vec{x}\|_2 \leqslant \|\vec{x}\|_1 \leqslant 2\|\vec{x}\|_\infty$.

Exercice 3. Pour $n \geqslant 1$, on considère les trois normes (on pose $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$)

$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|,\ \|\vec{x}\|_2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2},\ \|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}.$$

1. Montrer les inégalités

$$\|\vec{x}\|_\infty \leqslant \|\vec{x}\|_2 \leqslant \|\vec{x}\|_1 \leqslant n\|\vec{x}\|_\infty,$$

(pour l'inégalité du milieu on montrera que $\|\vec{x}\|_2^2 \leqslant \|\vec{x}\|_1^2$)