

Série 3

UNIL, Faculté des géosciences et de l'environnement, Cours de Mathématiques II.

8 Mars 2013

1. Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Est-ce que la fonction est continue sur \mathbf{R}^2 ? Plus précisément, montrer (i) que f est continue en dehors de $(x, y) = (0, 0)$ et (ii) que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.
Indice: montrer que $2|xy| \leq x^2 + y^2$.

2. Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Est-ce que la fonction est continue sur \mathbf{R}^2 ? Plus précisément, démontrer (i) que f est continue en dehors de $(x, y) = (0, 0)$ et (ii) que la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

3. Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x + y \leq 0 \\ xy + \sqrt{x+y} & \text{si } x + y > 0. \end{cases}$$

Déterminer les points de \mathbf{R}^2 où f est continue et où f est pas continue.

4. Déterminer si les fonctions suivantes sont continues en $(x, y) = (0, 0)$:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 - (x-y)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{\frac{x^2}{9} + 4y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Indication: montrer que $\frac{1}{9}(x^2 + y^2) \leq \frac{x^2}{9} + 4y^2$.