Cours de Mathématiques II - UNIL - Faculté des géosciences et de l'environnement

Série 4 - 22 mars 2013

(1) (a) Calculer les fonctions $g_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ et $g_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ pour les fonctions f suivantes.

(i) $f(x,y) = 4x^3y + 3x^2y$

(ii) $f(x,y) = \frac{x^3}{y}$

(iii) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

(iv) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

(v) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$

(vi) $f(x,y) = \log\big((\sin x)(\sin y)\big)$

(b) Calculer $\frac{\partial}{\partial y} g_1(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial x} g_2(x,y)$ dans chaque cas. Décider si l'égalité suivante est vérifiée :

$$\frac{\partial}{\partial y} g_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} g_2(x,y).$$

(2) Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ existent pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et les calculer.

(b) Soit $g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$. Montrer que g n'est pas continue en $(0,0)$.

(3) (a) Trouver l'équation du plan tangent à la surface $z = x^2y$ au point $(2,1,4)$.

(b) Trouver l'équation du plan tangent à la surface $x^2+y^2+z^2 = 25$ au point $(-3,0,4)$.

(c) Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de la fonction

$$f(x,y) = -\frac{y^2}{x}$$

au point $(1,1,-1)$. Existe-t-il un point du graphe où le plan tangent est horizontal ?