Cours de Mathématiques II - UNIL - Faculté des géosciences et de l'environnement

Série 5 - 12 avril 2013

(1) Considérer une fonction différentiable de deux variables réelles $f(x,y)$. On définit une nouvelle fonction de deux variables réelles

$$\overline{f}(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Montrer que $\overline{f}$ est différentiable et vérifier l'égalité

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial \varphi}\right)^2.$$

(2) On appelle angle de deux surfaces en un point de leur intersection l'angle formé par les plans tangents à ces deux surfaces en ce point. Sous quel angle le cylindre $x^2+y^2=4$ et la sphère $(x-2)^2+y^2+z^2=4$ se coupent-ils au point $P=(1,\sqrt{3},0)$? (on pourra calculer les vecteurs normaux).

(3) (a) Calculer le gradient de la fonction $f(x,y,z) = xe^{yz}+y$.

(b) Calculer la dérivée de $f(x,y,z)$ dans la direction du vecteur $(1,1,1)$ au point $(0,0,0)$.

(c) Au point $(0,0,0)$, dans quelle direction la dérivée de $f(x,y,z)$ est-elle maximale (quelle est la valeur de cette dérivée maximale) ? minimale (quelle est la valeur de cette dérivée minimale) ? nulle ?

(4) Trouver, lorsqu'ils existent, les points critiques des fonctions

(a) $g(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$;

(b) $h(x,y) = x^4 - y^4 + 1$.

et calculer aux points trouvés, les dérivées partielles d'ordres 2

$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 h}{\partial^2 y}$$