

(1) La semaine dernière vous avez déterminé les points critiques des fonctions

(a) $g(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$;

(b) $h(x, y) = x^4 - y^4 + 1$.

Déterminer si ces points sont des maxima locaux, des minima locaux, ou des points cols et dans ce dernier cas déterminer les équations des droites caractéristiques ainsi que le signe de $g(x, y) - g(x_0, y_0)$ (pour (x_0, y_0) le point col correspondant) au voisinage du point dans les cadrans déterminés par ces droites.

(2) Trouver les extrema relatifs ainsi que les points en col des fonctions suivantes :

(a) $2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 8y + 1$;

(b) $x^2 - 4xy + 3y^2 - 6x + 12y - 1$;

(c) $x^3 + x^3 - 3x - 12y + 20$.

Dans le cas d'un col déterminer les équations des droites caractéristiques ainsi que les signes du term quadratique dans les cadrans déterminés par ces droites.

(3) On considère la fonction

$$f(x, y) = 1 + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - y^3.$$

Montrer qu'il n'y a qu'un point critique et qu'il est dégénéré. Justifier le fait que, au voisinage de ce point, le graphe de f a une forme de "vallée". Comment cette "vallée" est elle "orientée".