

Cours de Mathématiques II - UNIL - Faculté des Géosciences et de l'Environnement
Série 7 26 avril-3 mai 2013

- (1) Considérer la fonction réelle de deux variables réelles $f(x, y) = \sin x - y^2$.
- (a) Déterminer les points d'extremum (absolu ou relatif) de la fonction $f(x, y)$ définie sur \mathbb{R}^2 .
 - (b) En quels points du graphe de la fonction $f(x, y)$ définie sur \mathbb{R}^2 le plan tangent au graphe est-il parallèle à l'axe Oy ?
 - (c) Déterminer les points d'extremum (absolu ou relatif) de la fonction $f(x, y)$ définie sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -1 \leq y \leq 1\}$.

- (2) Considérer la fonction réelle de deux variables réelles

$$f: D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x^4 + 2y^2 - 4xy.$$

- (a) Calculer la dérivée de la fonction f dans la direction du vecteur $(1, 1)$ en tout point (x, y) situé à l'intérieur du domaine de définition de f .
 - (b) Déterminer les extrema locaux de la fonction f dans l'intérieur de D .
 - (c) Etudier f sur le bord de D et calculer les extrema de f sur D tout entier.
- (3) Considérer la courbe plane (spirale logarithmique)

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \varphi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t).$$

- (a) Esquisser cette courbe.
- (b) Vérifier qu'en chacun de ses points $P = \varphi(t)$, cette spirale coupe la droite OP , passant par l'origine et par P , avec le même angle (pour cela on calculera le vecteur vitesse $\varphi'(t)$ et son angle avec la droite OP).
- (c) Calculer la longueur du vecteur vitesse $\varphi'(t)$ pour tout t .