Cours de Mathématiques II - UNIL - Faculté des Géosciences et de l'Environnement

Série 9, 17-24 Mai 2013

(1) Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x+2y, x^2-y^2)$ le long du triangle ABC (pris dans le sens trigonométrique) pour $A=(0,0)$, $B=(3,0)$, $C=(3,2)$. Ce champ est-il conservatif ?

(2) Calculer le travail du champs sur $\mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = (y, \sin x)$ le long du bord du domaine (pris dans le sens trigonométrique)

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\in[-\pi/2,\pi/2],\ y\in[0,\cos x]\}.$$

(3) Déterminer le potentiel du champs de vecteurs

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 1+2xyz^3, 4z+3xy^2z^2).$$

Calculer son travail le long de la courbe

$$\varphi : t\in[0,3\pi/4] \to (\sin t\cos(3t), \tan(t)^3, t\sin t).$$

(4) Quel est le domaine de définition $D(\vec{F})$ du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + e^{(x-y)},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - e^{(x-y)} + z^3,\ 3yz^2 - 2e^{-2z}\right).$$

Montrer qu'il est conservatif et déterminer son potentiel.

(5) (a) Les champs vectoriels

$$\vec{F}(x,y,z) = (-2xz - 2\sin(2x-y)\ ,\ ze^y + \sin(2x-y)\ ,\ e^y - x^2 + z^2)$$

et

$$\vec{G}(x,y,z) = (-2xz - 2\sin(2x-y)\ ,\ \sin(2x-y)\ ,\ e^y - x^2 + z^2)$$

définis sur $\mathbb{R}^3$ sont-ils des champs conservatifs ? Si oui, donner leur potentiels ; si non, expliquer pourquoi.

(b) Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z)$ et le travail du champ vectoriel $\vec{G}(x,y,z)$ le long de la courbe $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\,,\ -\pi\le y\le 2\pi\,,\ z=\sin y\}$ reliant le point $P=(0,-\pi,0)$ au point $Q=(0,2\pi,0)$.