Cours de Mathématiques II - UNIL - Faculté des Géosciences et de l'Environnement

**Série 9, Corrigé**

(1) Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (x+2y, x^2-y^2)$ le long du triangle $ABC$ (pris dans le sens trigonométrique) pour $A=(0,0)$, $B=(3,0)$, $C=(3,2)$. Ce champ est-il conservatif ?
Le triangle est composé de trois lignes :

$$\phi_1(t) = (t,0), t \in [0,3]$$

$$\phi_2(t) = (3,t), t \in [0,2]$$

$$\phi_3(t) = (3-\frac{3}{2}t, 2-t), t \in [0,2]$$

donc, le travail le long du triangle est

$$T(F,\phi_1) + T(F,\phi_2) + T(F,\phi_3).$$

On calcule :

$$T(F,\phi_1) = \int_0^3 (t,t^2)\cdot(1,0)dt = \int_0^3 tdt = \frac{3^2}{2} - 0 = \frac{9}{4},$$

$$T(F,\phi_2) = \int_0^2 (3+2y, 3^2-t^2)\cdot(0,1)dt = \int_0^2 3^2 - t^2 dt = 2\cdot 3^2 - \frac{2^3}{3} + 0 = \frac{46}{3},$$

$$T(F,\phi_3) = \int_0^2 ((3-\frac{3}{2}t + 4 - 2t, (3-\frac{3}{2}t)^2 - (2-t)^2)\cdot(-\frac{3}{2},-1)dt =$$

$$\int_0^2 (7-\frac{7}{2}t, 5-5t+\frac{5}{4}t^2)\cdot(-\frac{3}{2},-1)dt =$$

$$\int_0^2 (-\frac{21}{2}+\frac{21}{4}t-5+5t-\frac{5}{4}t^2)dt = \int_0^2 (-\frac{31}{2}+\frac{41}{4}t-\frac{5}{4}t^2)dt = -31+\frac{41}{4}\cdot\frac{4}{2}-\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{3} = -31+\frac{41}{2}-\frac{10}{3} = -13\frac{5}{6}$$

ainsi on trouve que le travail total est $2\frac{1}{4} + 15\frac{1}{3} - 13\frac{5}{6} = 3\frac{3}{4}$.

(2) Calculer le travail du champs sur $\mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = (y, \sin x)$ le long du bord du domaine (pris dans le sens trigonométrique)

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\in[-\pi/2,\pi/2],\ y\in[0,\cos x]\}.$$

Une parametrisation du long du bord du domaine (pris dans le sens trigonométrique) est :

$$\phi_1(t) = (t,0), t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

$$\phi_2(t) = (-t,\cos(-t)), t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

donc le travail est

$$T(F,\phi_1) + T(F,\phi_2).$$

On calcule :

$$T(F,\phi_1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (0,\sin t)\cdot(1,0)dt = 0,$$

$$T(F,\phi_2) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(-t),\sin(-t))\cdot(-1, sin(-t))dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos(-t)+\sin^2(-t)dt = -2+\frac{\pi}{2},$$

ainsi on trouve que le travail total est $-2+\frac{\pi}{2}$.

(3) Déterminer le potentiel du champs de vecteurs

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3, 1+2xyz^3, 4z+3xy^2z^2).$$

Calculer son travail le long de la courbe

$$\varphi : t \in [0, 3\pi/4] \to (\sin t\cos(3t), \tan(t)^3, t\sin t).$$

On cherche $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ avec $\nabla f = F$. On a

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + C_1(y,z)$$

où $C_1(y,z)$ est constant par rapport à $x$. De la même façon,

$$f(x,y,z) = y + xy^2z^3 + C_2(x,z)$$

où $C_2(x,z)$ est constant par rapport à y. De la même façon,

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + 2z^2 + C_3(x,y)$$

où $C_3(x,y)$ est constant par rapport à z. Ainsi, on voit que toute fonction de la forme

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + y + 2z^2 + C$$

pour tout constant absolu $C$ aura $\nabla f = F$.
On trouve les points finals de la courbe :

$$\varphi(0) = (0,0,0), \varphi(\frac{3\pi}{4}) = (\frac{1}{2}, -1, \frac{3\pi}{4\sqrt{2}})$$

et par ce que vous avez vu pendant le cours, comme ces champs vectoriels sont conservatifs, on a

$$T(F, \varphi([0, \frac{3\pi}{4}])) = f(\frac{1}{2}, -1, \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}) - f(0,0,0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^3\pi}{4^3\sqrt{2^3}} - 1 + 2\frac{3^2\pi}{4^2 2}.$$

(4) Quel est le domaine de définition $D(\vec{F})$ du champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + e^{(x-y)},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - e^{(x-y)} + z^3,\ 3yz^2 - 2e^{-2z} \right).$$

Montrer qu'il est conservatif et déterminer son potentiel.
Le domaine de définition est $\{(x,y,z) : x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,t) : t \in \mathbb{R}\}$.
On cherche $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ avec $\nabla f = F$. On a

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + e^{(x-y)} + C_1(y,z)$$

où $C_1(y,z)$ est constant par rapport à $x$. De la même façon,

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + e^{(x-y)} + yz^3 + C_2(x,z)$$

où $C_2(x,z)$ est constant par rapport à y. De la même façon,

$$f(x,y,z) = yz^3 + e^{-2z} + C_3(x,y)$$

où $C_3(x,y)$ est constant par rapport à z. Ainsi, on voit que toute fonction de la forme

$$f(x,y,z) = yz^3 + e^{-2z} + \sqrt{x^2+y^2} + e^{(x-y)} + C$$

pour tout constant absolu $C$ aura $\nabla f = F$. Donc F est conservatif.

(5) Les champs vectoriels

$$\vec{F}(x,y,z) = (-2xz - 2\sin(2x-y)\ ,\ ze^y + \sin(2x-y)\ ,\ e^y - x^2 + z^2)$$

et

$$\vec{G}(x,y,z) = (-2xz - 2\sin(2x-y)\ ,\ \sin(2x-y)\ ,\ e^y - x^2 + z^2)$$

définis sur $\mathbb{R}^3$ sont-ils des champs conservatifs ? Si oui, donner leur potentiels ; si non, expliquer pourquoi.

Corrigé : Le champ $G$ n'est pas conservatif, parce que on sait que chaque $g$ potentiel doit être de la forme

$$ze^y + zx^2 + \frac{z^3}{3} + C(x, y)$$

c'est pourquoi $\frac{\partial g}{\partial y}$ doit obligatoirement contenir $ze^y$, et alors ne peuvent pas être egaux a $\sin(2x - y)$.
Par contre, $F$ est conservatif : De la même façon on trouve que

$$f(x, y, z) = -x^2 z + \cos(2x - y) + ze^y + \frac{z^3}{3}$$

est un potentiel pour $F$.
Calculer le travail du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z)$ et le travail du champ vectoriel $\vec{G}(x, y, z)$ le long de la courbe $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\,,\ -\pi \leq y \leq 2\pi\,,\ z = \sin y\}$ reliant le point $P = (0, -\pi, 0)$ au point $Q = (0, 2\pi, 0)$.
Corrigé :
Soyez $A$ et $B$ champs vectoriel. On a $T(A + B, \gamma) = T(A, \gamma) + T(B, \gamma)$ ; Par définition :

$$T(A + B, \gamma) = \int_\gamma (A + B)(\gamma)\gamma'(t)dt = \int_\gamma A(\gamma)\gamma'(t)dt + \int_\gamma B(\gamma)\gamma'(t)dt = T(A, \gamma) + T(B, \gamma).$$

Car $F$ est conservatif, on a

$$T(F, \gamma) = f(0, 2\pi, 0) - f(0, -\pi, 0) = \cos(-2pi) - \cos(pi) = 1 + 1 = 2.$$

Soit $H$ le champ vectoriel définie par

$$\vec{H}(x, y, z) = (0, ze^y, 0).$$

On calcule :

$$T(H, \gamma) = \int_{-\pi}^{2\pi} H(0, t, \sin t) \cdot (0, 1, \cos t)dt = \int_{-\pi}^{2\pi} (0, \sin te^t, 0) \cdot (0, 1, \cos t)dt =$$

$$\int_{-\pi}^{2\pi} \sin te^t dt = -\frac{1}{2}(e^{-\pi} + e^{2\pi}),$$

où on a utilisé le fait que primitive fonction de $\sin te^t$ est $\frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t)$. Maintenant, car $G = F - H$ on a

$$T(G, \gamma) = T(F, \gamma) - T(H, \gamma) = 2 + \frac{1}{2}(e^{-\pi} + e^{2\pi}).$$