

## CHAPITRE 5

### Champs de vecteurs

DÉFINITION 5.1. *Un champ de vecteur est une application  $\vec{F}$  définie et continue sur un domaine  $D(\vec{F})$  de  $\mathbf{R}^3$  qui à chaque point  $(x, y, z)$  de  $\mathbf{R}^3$  associe un vecteur  $\vec{F}(x, y, z)$  de  $\mathbf{R}^3$  :*

$$\vec{F} : \begin{array}{l} \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto \vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \end{array}$$

*Ainsi se donner un champs de vecteur revient à ce donner trois fonctions continues sur un domaine de  $\mathbf{R}^3$  à valeurs réelles.*

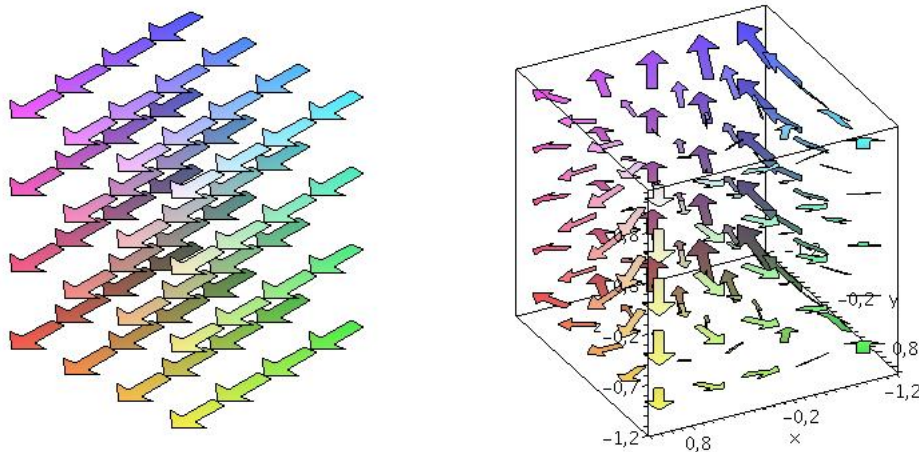


FIGURE 1. Exemples :  $\vec{F}(x, y, z) = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 - y^2, 2y, z^2 - x)$

EXEMPLE 0.3.3. (Champs de vecteurs constants) On considère une application qui associe à tout point un vecteur constant

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

EXEMPLE 0.3.4. On considère le champ  $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 - y^2, 2y, z^2 - x)$

#### 0.4. Lignes de champ.

DÉFINITION 5.2. Soit  $\vec{F}$  un champ de vecteur. Une ligne de champ (associée à  $\vec{F}$ ) est une courbe paramétrée  $\varphi : [a, b] \mapsto \mathbf{R}^3$  telle que pour tout  $t$  le vecteur tangent  $\varphi'(t)$  est colinéaire au vecteur  $\vec{F}(\varphi(t))$ .

EXEMPLE 0.4.1. – Les lignes de champ du champ de vecteur constant  $\vec{F} = (0, 0, 1)$  sont les droites verticales.  
– Les lignes de champ du champ  $\vec{F} = (x, y, z)$  sont les droites passant par l'origine.

### 1. Champs de gradients

Une classe très importante de champs de vecteurs est celle des *champs de gradients* encore appelées *champ de potentiel* :

DÉFINITION 5.3. Soit  $V : D(V) \subset \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$  une fonction différentiable définie sur un domaine  $D(V)$ . Le champ de gradient associé à  $V$  (on dit aussi le champ associé au potentiel  $V$ ) est le champ défini sur  $D(V)$  par

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla V(x, y, z) = \left( \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) \right).$$

En d'autres termes les coordonnées du champ sont

$$F_1(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z), F_2(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z), F_3(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z)$$

Par exemple, un champ de vecteur constant  $\vec{F}(x, y, z) = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  est le champ de gradient associé à la fonction (au potentiel)

$$V(x, y, z) = v_1x + v_2y + v_3z = \vec{v} \cdot (x, y, z).$$

Notons qu'un tel potentiel n'est pas unique : pour tout constant  $C$

$$\nabla V = \nabla(V + C)$$

car  $\nabla C = \vec{0}$ . Notons que réciproquement si  $\nabla V = \vec{0}$  alors  $V = \text{Constante}$  : en effet, si

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) \equiv 0$$

alors  $V(x, y, z) = V(1, y, z)$  ne dépend pas de  $x$ , de même  $V$  ne dépend pas de  $y$  ni de  $z$ ... Ainsi si  $\nabla V_1 = \nabla V_2$  alors  $V_1(x, y, z) - V_2(x, y, z) = \text{Constante}$  : deux potentiels associés à un même champ de potentiel diffèrent par une constante.

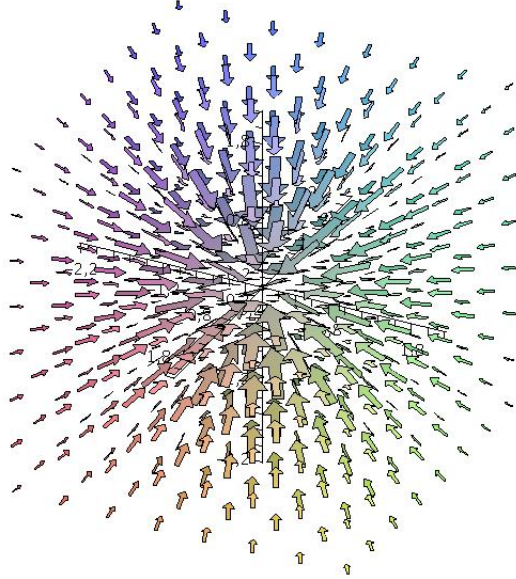


FIGURE 2. Le champ de gravitation  $\vec{F} = -m\nabla V(x, y, z)$ ,  $V = -\frac{MG}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ .

**1.1. Exemple : le champ de gravitation.** Un corps ponctuel de masse  $M$  localisé à l'origine  $(0, 0, 0)$  crée un potentiel gravitationnel dont la valeur au point  $P = (x, y, z)$  vaut

$$V(x, y, z) = -\frac{MG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{MG}{r}, \quad r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|(x, y, z)\|.$$

Un corps ponctuel de masse  $m$ , situé au point  $(x, y, z)$  subit alors une force de gravitation dont le vecteur est donné par

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= -m\nabla V(x, y, z) \\ &= -mMG \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= -\frac{mMG}{r^2} \vec{u}(x, y, z) \end{aligned}$$

avec

$$\vec{u}(x, y, z) = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right)$$

le vecteur unitaire (ie. de longueur  $\|\vec{u}\| = 1$ ) colinéaire au vecteur  $\vec{OP} = (x, y, z)$ . et  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  la constante gravitationnelle. Le

**1.2. Surfaces de potentiel.** Etant donné un potentiel  $V(x, y, z)$  et  $\vec{F}(x, y, z) = \nabla V(x, y, z)$  le champ de potentiel associé, les surfaces de niveau

$$S_V(C) = \{(x, y, z) \in D(V), f(x, y, z) = C\}$$

pour  $C$  une constante fixée sont encore appelées les *surfaces* de potentiel du champ  $\vec{F}$ . Faisant varier la constante  $C$  on voit que l'espace est *partitionné* en une familles continue de surfaces de potentiel. Dans le chapitre précédent on a rencontré le phénomène suivant :

Soit  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un point de  $D(V)$  et  $V_0 = V(x_0, y_0, z_0)$ ; le point  $P_0$  appartient évidemment à la surface de potentiel  $S_V(V_0)$ . On a vu que  $\nabla V(x_0, y_0, z_0)$  est orthogonal au plan tangent à  $S_V(V_0)$  en  $P_0$ , ce que l'on peut résumer ainsi

**PROPOSITION 5.1.** *En tout point  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , le champ de potentiel  $\vec{F} = \nabla V$  est perpendiculaire à la surface de potentiel  $S_V(V_0)$  passant par  $P_0$ .*

On a également le résultat suivant concernant les courbes paramétrées contenues dans les surfaces de potentiel :

**PROPOSITION 5.2.** *Soit  $f$  un potentiel et  $\vec{F} = \nabla V$  le champ de potentiel associé. Soit  $C$  st une constante et  $\varphi : [a, b] \mapsto \mathbf{R}^3$  une courbe paramétrée qui est contenue dans la surface de potentiel  $S_f(Cst)$  ( $\varphi([a, b]) \subset S_f(Cst)$ ) alors pour tout  $t$  dans  $[a, b]$ , le vecteur tangent  $\varphi'(t)$  est perpendiculaire à  $\vec{F}(\varphi(t))$ .*

## 2. Travail d'un champ de vecteurs

Dans cette section on veut définir la notion de travail exercé par un champ (de force)  $\vec{F}$  lors du déplacement d'un corps le long d'une courbe paramétrée

$$\varphi : t \in [a, b] \mapsto \varphi(t) \in D(\vec{F}) \subset \mathbf{R}^3.$$

Pour ce simplifier la vie on va supposer que deux point quelconques du domaine de définition  $D(\vec{F})$  peuvent être reliés par une courbe :

**DÉFINITION 5.4.** *Un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$  est connexe par arcs si et seulement si pour tous points  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{D}$  il existe au moins une courbe*

$$\varphi : t \in [a, b] \mapsto \varphi(t) \in \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$$

telle que

$$\varphi(a) = A, \varphi(b) = B.$$

**EXEMPLE 2.0.1.**  $\mathbf{R}^3$  est connexe par arcs,  $\mathbf{R}^3 - \mathbf{R}^2$  ( $\mathbf{R}^2 = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbf{R}\}$  le plan horizontal) ne l'est pas (si on veut relier  $(0, 0, -1)$  a  $(0, 0, 1)$  par une courbe continue la courbe doit croiser le plan horizontal).

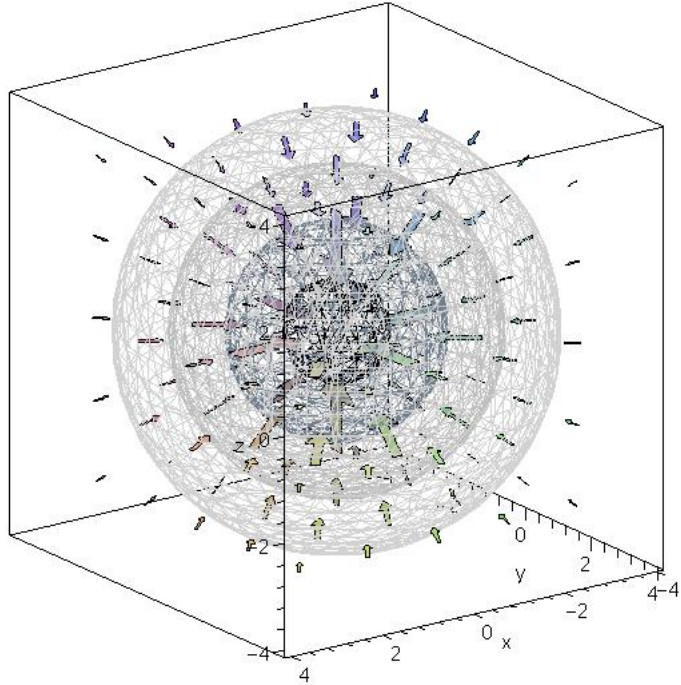


FIGURE 3. Le champ  $\vec{F} = -m\nabla V(x, y, z)$ ,  $V = -\frac{MG}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$  et des surfaces de potentiel associées.

Pour éviter une telle situation on supposera toujours que  $D(\vec{F})$  est connexe par arcs.

**2.1. Cas d'un champ constant et d'un segment de droite.** On commence par le cas le plus simple du travail effectué par un champ constant  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  dans un déplacement  $\varphi$  le long du segment de droite  $[A, B]$  en allant du point  $A$  au point  $B$  ( $\varphi(a) = A$ ,  $\varphi(b) = B$ ). Dans ce cas le travail est défini par

$$T(\vec{F}, \varphi([a, b])) = T(\vec{F}, \overrightarrow{AB}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F_1(x_B - x_A) + F_2(y_B - y_A) + F_3(z_B - z_A).$$

REMARQUE 2.1. Le travail ainsi défini ne dépend pas de la vitesse le long du segment  $[A, B]$  (par exemple le travail ne dépend pas de  $a$  ou  $b$  ou  $b - a$ ) ; si on allait de  $B$  à  $A$  ( $\varphi(a) = B$ ,  $\varphi(b) = A$ ), le travail obtenu serait l'opposé

$$T(\vec{F}, \varphi([b, a])) = T(\vec{F}, \overrightarrow{BA}) = -T(\vec{F}, \overrightarrow{AB}).$$

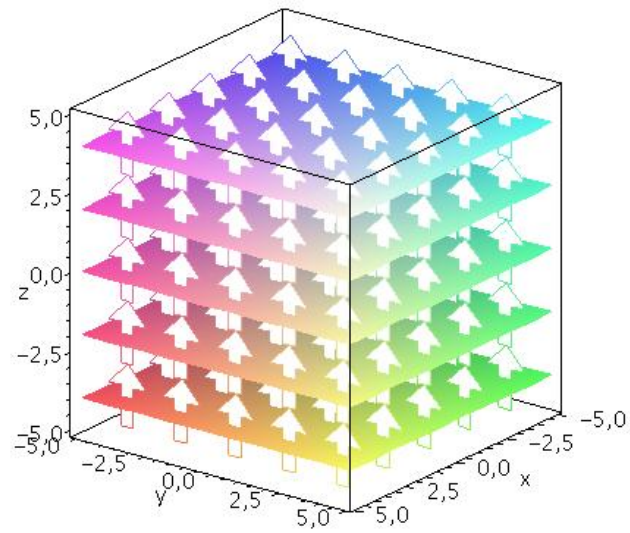


FIGURE 4. Le champ constant  $\vec{F} = (0, 0, 1)$  associé au potentiel  $f(x, y, z) = z$  et les surfaces de potentiel associées.

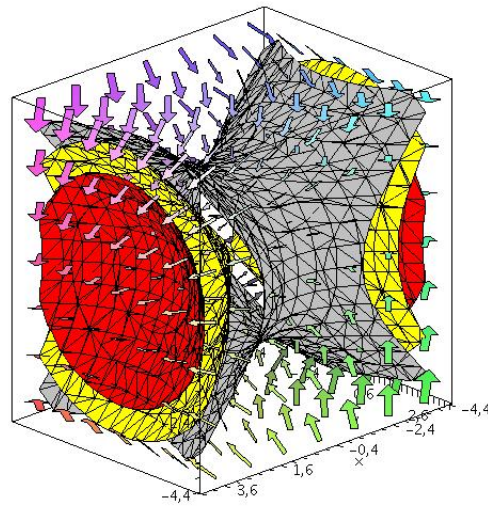


FIGURE 5.  $f = x^2 + y^2 - z^2$ , trois surfaces de potentiel et le champ de gradient associé

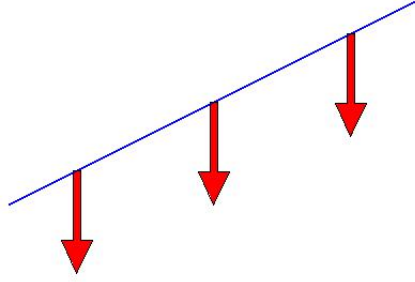


FIGURE 6. Travail d'un champ constant le long d'un segment

**2.2. Cas général.** Pour définir le travail dans le cas général (où le déplacement n'est pas rectiligne et le champ n'est pas forcément constant), on procède comme pour la définition de la longueur d'une courbe : pour  $n$  très grand, on subdivise l'intervalle de parcourt  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles de longueur  $h_n = (b - a)/n$

$$[a, b] = [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup \cdots \cup [t_n, t_{n+1}]$$

avec

$$t_1 = a, \quad t_{n+1} = b, \quad t_k = a + (k - 1)(b - a)/n.$$

pour chaque  $k = 1 \dots n$ , on a : si  $n$  est grand, la courbe paramétrée  $\varphi([t_k, t_{k+1}])$  restreinte à l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  est proche du segment rectiligne  $[\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]$ , en effet par la formule d'approximation linéaire (2.1), cette courbe est représentée par

$$h \in [0, h_n] \mapsto \varphi(t_k + h) = \varphi(t_k) + h\varphi'(t_k) + h\vec{\varepsilon}(h)$$

alors qu'un paramétrage du segment  $[\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]$  est donné par

$$h \in [0, h_n] \mapsto \varphi(t_k) + h \cdot \frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)}{h_n}$$

et si  $h_n \rightarrow 0$

$$\frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)}{h_n} \sim \varphi'(t_k).$$

De plus quand  $h \in [0, h_n]$  et que  $n$  est grand (donc  $h_n$  est petit)

$$\vec{F}(\varphi(t_k + h)) \sim \vec{F}(\varphi(t_k))$$

et le travail de  $\vec{F}$  le long de l'arc  $\varphi([t_k, t_{k+1}])$  est proche de celui effectué par le champ constant  $\vec{F}(\varphi(t_k))$  le long du segment rectiligne  $[\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]$

$$T(\vec{F}, \varphi([t_k, t_{k+1}])) \sim T(\vec{F}(\varphi(t_k)), [\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]).$$

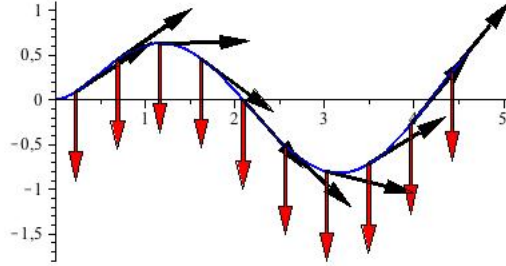


FIGURE 7. travail d'un champ constant le long d'une courbe

Le travail le long de la courbe  $\varphi([a, b])$  étant la somme des travaux le long des sous-courbes  $\varphi([t_k, t_{k+1}])$  on obtient que le travail total est bien approximé par la somme

$$\sum_{k=1}^n T(\vec{F}(\varphi(t_k)), [\varphi(t_k), \varphi(t_{k+1})]) = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \vec{F}(\varphi(t_k)) \cdot \varphi'(t_k)$$

On reconnait à nouveau une somme de Riemann convergente

$$\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \vec{F}\left(\varphi\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right)\right) \cdot \varphi'\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right) \rightarrow \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Ceci justifie la

**DÉFINITION 5.5.** *Le travail d'un champ de vecteur  $\vec{F}$  le long d'une courbe paramétrée  $\varphi : [a, b] \mapsto \mathbf{R}^3$  est donné par la formule*

$$T(\vec{F}, \varphi([a, b])) = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

**2.2.1. Exemple : segment de droite dans un champ constant.** Soit  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  un champ constant. Considérons le cas d'un segment de droite :

$$\varphi(t) = ((1-t)x_A + tx_B, (1-t)y_A + ty_B, (1-t)z_A + tz_B).$$

On a

$$\varphi'(t) = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = \overrightarrow{AB}$$

et donc

$$T(\vec{F}, \varphi([0, 1])) = \int_0^1 \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} dt = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

On retrouve donc le résultat attendu.



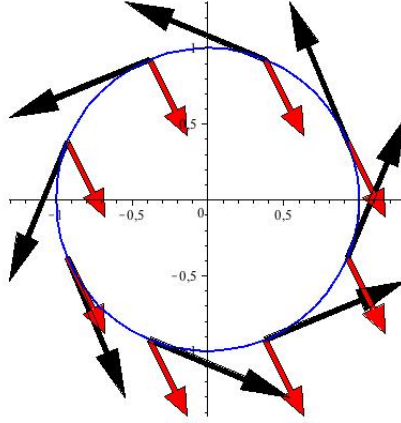


FIGURE 8. Travail d'un champ constant sur un cercle

2.2.2. *Exemple : cercle.*

$$\varphi(t) = (x_0 + R \cos(t), y_0 + R \sin(t), z_0)$$

et

$$\varphi'(t) = (-R \sin(t), R \cos(t), 0).$$

Ainsi si  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  est un champ constant, on obtient

$$T(\vec{F}, \varphi([0, 2\pi])) = \int_0^{2\pi} F_1 \cdot (-R \sin(t)) + F_2 \cdot R \cos(t) + F_3 \cdot 0 dt = 0.$$

Supposons  $x_0 = y_0 = 0$  et  $\vec{F}(x, y, z) = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = r^{-2}(x/r, y/r, z/r)$ , on a en posant  $R_0 = \sqrt{R^2 + z_0^2}$

$$\vec{F}(\varphi(t)) = R_0^{-2}(R \cos(t)/R_0, R \sin(t)/R_0, z_0/R_0)$$

et on obtient

$$T(\vec{F}, \varphi([0, 2\pi])) = R^2 R_0^{-3} \cdot \int_0^{2\pi} (-\cos(t) \sin(t)) + \sin(t) \cos(t) + 0 dt = 0.$$

considérons maintenant le champ  $\vec{F} = (x, y, z)$ .

$$T(\vec{F}, \varphi([0, 2\pi])) = \int_0^{2\pi} (x_0 + R \cos(t)) \cdot (-R \sin(t)) + (x_0 + R \sin(t)) \cdot R \cos(t) dt = 0.$$

On verra plus loin que ces annulations ne sont pas des accidents.

### 2.3. Propriétés du travail.

2.3.1. *Additivité par juxtaposition.* Soit

$$\varphi_1 : t \in [a, b] \mapsto (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$$

et

$$\varphi_2 : t \in [b, c] \mapsto (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$

deux courbes paramétrées telles que  $\varphi_2(b) = \varphi_1(b)$ ; on forme une nouvelle courbe

$$\varphi_3 : [a, c] \mapsto \mathbf{R}^3$$

en posant  $\varphi_3(t) = \varphi_1(t)$  si  $a \leq t \leq b$  et  $\varphi_3(t) = \varphi_2(t)$  si  $b \leq t \leq c$ . On a alors

$$\begin{aligned} T(\vec{F}, \varphi_3([a, c])) &= T(\vec{F}, \varphi_3([a, b])) + T(\vec{F}, \varphi_3([b, c])) \\ &= T(\vec{F}, \varphi_1([a, b])) + T(\vec{F}, \varphi_2([b, c])). \end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned} \int_a^c \vec{F}(\varphi_3(t)) \cdot \varphi_3'(t) dt &= \int_a^b \vec{F}(\varphi_3(t)) \cdot \varphi_3'(t) dt + \int_b^c \vec{F}(\varphi_3(t)) \cdot \varphi_3'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\varphi_1(t)) \cdot \varphi_1'(t) dt + \int_b^c \vec{F}(\varphi_2(t)) \cdot \varphi_2'(t) dt \end{aligned}$$

2.3.2. *Invariance par changement de paramètre.* Soit

$$\varphi : [a, b] \mapsto \mathbf{R}^3$$

une courbe paramétrée et sur  $u : [a', b'] \mapsto [a, b]$  un changement de paramètre ( $u$  est dérivable strictement croissante et  $u(a') = a$ ,  $u(b') = b$ ), on obtient donc une nouvelle courbe paramétrée

$$\varphi_2 : s \in [a', b'] \mapsto \varphi(u(s)) \in \mathbf{R}^3.$$

PROPOSITION 5.3. *On a*

$$T(\vec{F}, \varphi_2([a', b'])) = T(\vec{F}, \varphi([a, b])).$$

*autrement dit le travail ne dépend pas du choix du paramètre.*

**Preuve:**

$$T(\vec{F}, \varphi_2([a', b'])) = \int_{a'}^{b'} \vec{F}(\varphi_2(s)) \cdot \varphi_2'(s) ds$$

avec (dérivée des fonctions composées)

$$\varphi_2(s) = \varphi(u(s)), \quad \varphi_2'(s) = u'(s)\varphi'(u(s)).$$

Ainsi par changement de variable

$$t = u(s), \quad dt = u'(s)ds, \quad a = u(a'), \quad b = u(b')$$

on a

$$\int_{a'}^{b'} \vec{F}(\varphi_2(s)) \cdot \varphi_2'(s) ds = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = T(\vec{F}, \varphi([a, b])).$$

2.3.3. *Inversion du temps.* Soit

$$\varphi : t \in [a, b] \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

une courbe paramétrée reliant  $A = \varphi(a)$  à  $B = \varphi(b)$ . Posons alors

$$\varphi_2 : s \in [a, b] \mapsto (x(b - s + a), y(b - s + a), z(b - s + a));$$

quand  $s$  varie entre  $a$  et  $b$ ,  $b - s + a$  est une fonction décroissante variant entre  $b$  et  $a$ ; on obtient donc une nouvelle courbe paramétrée  $\varphi_2([a, b])$  parcourant la même courbe géométrique mais en allant de  $B$  à  $A$  : on peut noter cette nouvelle courbe  $\varphi([b, a])$ . On a alors

$$T(\vec{F}, \varphi([b, a])) = T(\vec{F}, \varphi_2([a, b])) = -T(\vec{F}, \varphi([a, b])).$$

En effet,  $\varphi_2'(s) = -\varphi'(b - s + a)$  et donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \vec{F}(\varphi_2(s)) \cdot \varphi_2'(s) ds &= - \int_a^b \vec{F}(\varphi(b - s + a)) \cdot \varphi'(b - s + a) ds \\ &= \int_b^a \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = - \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

où on a fait le changement de variable  $t = b - s + a$   $dt = -ds$ .

Ainsi le travail s'inverse lorsqu'on parcourt le chemin en sens inverse.

2.3.4. *Notation intrinsèque du travail.* Compte-tenu de l'invariance du travail effectué par un champ sous un changement de paramétrage, on utilisera la notation suivante pour le travail d'un champ le long d'une courbe géométrique  $\mathcal{C}$  parcourue dans un sens donné : si  $\mathcal{C} = \varphi([a, b])$ , on écrira

$$T(\vec{F}, \varphi([a, b])) := \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\varphi.$$

Ainsi si on désigne par  $-\mathcal{C}$  la même courbe parcourue en sens inverse ( $-\mathcal{C} = \varphi([b, a])$ ), on aura

$$\int_{-\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\varphi = - \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\varphi$$

2.3.5. *Circulation d'un champ de vecteur.* Si la courbe paramétrée  $\varphi$  vérifie

$$A = \varphi(a) = \varphi(b) = B$$

la courbe géométrique  $\mathcal{C}$  est *fermée* : le travail d'un champ le long d'une telle courbe est appelé *circulation* du champ  $\vec{F}$  le long de  $\mathcal{C}$  et est noté

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\varphi.$$

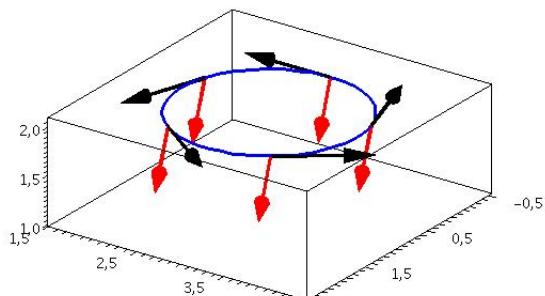


FIGURE 9. circulation d'un champ constant le long d'un cercle.

### 3. Champs conservatifs

On a vu précédemment que le travail d'un champ le long d'une courbe ne dépend pas du paramétrage de la courbe; en revanche il dépend en général de la courbe géométrique associée. On peut ainsi dire que :

*le travail dépend du chemin suivi, mais pas de la manière dont le chemin est suivi.*

**DÉFINITION 5.6.** *On dira qu'un champs  $\vec{F}$  est conservatif, si son travail le long d'une courbe  $\varphi([a, b])$  dans  $D(\vec{F})$  ne dépend que des extrémités de la courbe  $A = \varphi(a)$  et  $B = \varphi(b)$  mais pas de la courbe elle-même; ie. si le travail reste le même pour toute courbe de  $D(\vec{F})$  reliant  $A$  à  $B$ .*

Autrement dit *un champ de vecteurs est conservatif si le travail effectué ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée.*

**NOTATION.** *Si un champ  $\vec{F}$  est conservatif, on notera le travail de  $\vec{F}$  le long de tout chemin reliant  $A$  à  $B$  par*

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\varphi = T(\vec{F}, \widehat{AB}).$$

On a alors la relation de juxtaposition

**PROPOSITION 5.4.** *Soit  $\vec{F} : D(\vec{F}) \subset \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$  un champ conservatif et  $A, B, C \in D(\vec{F})$ . On a*

$$T(\vec{F}, \widehat{AC}) = T(\vec{F}, \widehat{AB}) + T(\vec{F}, \widehat{BC}).$$

3.0.6. *Exemple : Un champ constant  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  est conservatif.* En effet soit  $A, B$  deux point et  $\varphi : [a, b] \mapsto \mathbf{R}^3$  tel que

$$\varphi(a) = A = (x_A, y_A, z_A), \quad \varphi(b) = B = (x_B, y_B, z_B);$$

écrivons  $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

$$\begin{aligned} T(\vec{F}, \varphi([a, b])) &= \int_a^b F_1 x'(t) + F_2 y'(t) + F_3 z'(t) dt \\ &= F_1(x(b) - x(a)) + F_2(y(b) - y(a)) + F_3(z(b) - z(a)) \\ &= F_1(x_B - x_A) + F_2(y_B - y_A) + F_3(z_B - z_A) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la valeur du travail le long du segment rectiligne  $\overrightarrow{AB}$ .

3.0.7. *Exemple : Le champ  $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, xz, 1)$  n'est pas conservatif.* Considérons les courbes de  $[0, 1] \mapsto \mathbf{R}^3$

$$\varphi_1(t) = (t, t, t), \quad \varphi_2(t) = (t, t^2, t^3)$$

qui joignent les point  $A = (0, 0, 0)$  et  $B = (1, 1, 1)$  : on a

$$\varphi_1'(t) = (1, 1, 1), \quad \varphi_2'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$T(\vec{F}, \varphi_1) = \int_0^1 t^2 + t^2 + 1 dt = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

$$T(\vec{F}, \varphi_2) = \int_0^1 t^4 + t^4 \cdot 2t + 3t^2 dt = \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + 1 = \frac{46}{30} \neq \frac{5}{3}.$$

On a la caractérisation suivante d'un champ conservatif

**PROPOSITION 5.5.** *Un champ  $\vec{F}$  est conservatif si et seulement si, son travail le long d'une courbe fermée quelconque est nul : pour tout courbe  $\mathcal{C}$  fermée*

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\varphi = 0.$$

**Preuve:** Soit  $\varphi : [a, b] \mapsto \mathbf{R}^3$  une paramétrisation de la courbe  $\mathcal{C}$ . Notons  $\varphi(a) = \varphi(b) = A$ . Soit  $B = \varphi(\frac{a+b}{2})$ . La courbe  $\mathcal{C}$  est réunion de deux courbes paramétrées  $\varphi_1, \varphi_2$  avec

$$\varphi_1 : t \in [a, \frac{a+b}{2}] \mapsto \varphi(t), \quad \varphi_2 : t \in [\frac{a+b}{2}, b] \mapsto \varphi(t)$$

qui relie  $A$  à  $B$  puis  $B$  à  $A$  respectivement. On a

$$\begin{aligned} T(\vec{F}, \varphi([a, b])) &= \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \vec{F}(\varphi(t)) \varphi'(t) dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \vec{F}(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= T(\vec{F}, \varphi_1([a, \frac{a+b}{2}])) + T(\vec{F}, \varphi_2([\frac{a+b}{2}, b])). \end{aligned}$$

Mais la courbe  $\varphi_3(t) = \varphi_2(b - t + \frac{a+b}{2})$  relie  $A$  à  $B$  en suivant la même courbe géométrique que  $\varphi_2$  et donc

$$T(\vec{F}, \varphi_2([\frac{a+b}{2}, b])) = -T(\vec{F}, \varphi_3([\frac{a+b}{2}, b])) = -T(\vec{F}, \varphi_1([a, \frac{a+b}{2}]))$$

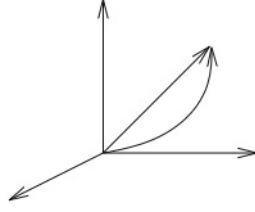


FIGURE 10. Les courbes  $\varphi_1(t) = (t, t, t)$ ,  $\varphi_2(t) = (t, t^2, t^3)$

car le champ est conservatif et  $\varphi_3$  et  $\varphi_1$  relient les mêmes points. Ainsi

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\varphi = T(\vec{F}, \varphi([a, b])) = T(\vec{F}, \varphi_1([a, \frac{a+b}{2}])) - T(\vec{F}, \varphi_1([a, \frac{a+b}{2}])) = 0.$$

□

On va maintenant caractériser les champs de vecteurs conservatifs comme étant les champs de potentiels.

**THÉORÈME 5.1.** *Soit un champ de vecteur  $\vec{F}$ . Alors  $\vec{F}$  est conservatif si et seulement si  $\vec{F}$  est un champ de potentiel : ssi il existe une fonction  $V(x, y, z)$  différentiable telle que*

$$\vec{F} = \nabla V.$$

Dans ce cas, pour toute courbe paramétrée  $\varphi$  à valeur dans  $D$  reliant un point  $A$  à un point  $B$  on a

$$T(\vec{F}, \widehat{AB}) = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = f(B) - f(A).$$

**Preuve:** Soit  $\vec{F} = \nabla V$  un champ de potentiel. Montrons que  $\vec{F}$  est conservatif. Soient  $A, B \in \mathcal{D}$  et  $\varphi : [0, 1] \mapsto \mathcal{D}$  une courbe contenue dans  $\mathcal{D}$  liant  $A$  à  $B$  ( $\varphi(0) = A$ ,  $\varphi(1) = B$ ).

$$\int_{\widehat{AB}_\varphi} \vec{F} \cdot d\varphi = \int_0^1 \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^1 \nabla V(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Soit

$$\psi : t \mapsto V(\varphi(t));$$

on a vu précédemment (règle de dérivation des fonctions composées) que

$$\psi'(t) = \nabla V(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

et l'intégrale précédente vaut donc

$$\int_0^1 \nabla V(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^1 \psi'(t) dt = \psi(1) - \psi(0) = f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)) = f(B) - f(A).$$

Réciproquement, considérons un champ conservatif  $\vec{F}$ ; soit  $A = (x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{D}$  un point fixé du domaine  $\mathcal{D}$ . Pour tout point  $B = (x, y, z)$  de  $\mathcal{D}$  posons

$$V(B) = V(x, y, z) = T(\vec{F}, \widehat{AB}),$$

le travail étant calculé en suivant une courbe paramétrée quelconque reliant  $A$  à  $B$ .

REMARQUE 3.1. Il est naturel de prendre  $V(B)$  de la forme

$$T(\vec{F}, \widehat{AB}).$$

En effet l'argument précédent montre que si  $\vec{F} = \nabla V$  est un champ de potentiel, alors

$$V(B) - V(A) = T(\nabla V, \widehat{AB}).$$

On va montrer que

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla V(x, y, z).$$

Il s'agit de montrer que

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h, y, z) - V(x, y, z)}{h} = F_1(x, y, z)$$

et que

$$\frac{\partial V}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = F_3.$$

soit  $h \in \mathbf{R}$  petit ; posons  $B = (x, y, z)$ ,  $B_h = (x+h, y, z)$ . On veut calculer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(\vec{F}, \widehat{AB}_h) - T(\vec{F}, \widehat{AB})}{h}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} 0 &= T(\vec{F}, \widehat{AA}) = T(\vec{F}, \widehat{AB}) + T(\vec{F}, \widehat{BB}_h) + T(\vec{F}, \widehat{B_hA}) \\ &= T(\vec{F}, \widehat{AB}) + T(\vec{F}, \widehat{BB}_h) - T(\vec{F}, \widehat{AB}_h) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{T(\vec{F}, \widehat{AB}_h) - T(\vec{F}, \widehat{AB})}{h} = \frac{T(\vec{F}, \widehat{BB}_h)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

avec

$$\varphi(t) = (x+t, y, z)$$

la courbe paramétrée qui parcourt le segment  $[B, B_h]$  à vitesse constante : si  $h$  est assez petit, on peut supposer qu'un tel segment est entièrement contenu dans  $\mathcal{D}$ .

Ainsi, comme  $\varphi'(t) = (1, 0, 0)$ , on a

$$\frac{1}{h} \int_0^h \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \frac{1}{h} \int_0^h F_1(x+t, y, z) dt$$

Soit  $G$  une primitive de la fonction (d'une variable réelle)  $g : t \mapsto F_1(x+t, y, z)$  alors l'intégrale précédente vaut

$$\frac{1}{h} \int_0^h g(t) dt = \frac{G(h) - G(0)}{h}$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(\vec{F}, \widehat{AB}_h) - T(\vec{F}, \widehat{AB})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h) - G(0)}{h} = G'(0) = g(0) = F_1(x, y, z).$$

On a donc montré que

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) = F_1(x, y, z).$$

Appliquant le même raisonnement pour  $\frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial z}$ , on conclut que

$$\nabla V(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) = \vec{F}(x, y, z).$$

ainsi la fonction  $V$  est une fonction définie sur le domaine  $\mathcal{D}$  admettant des dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} = F_1, \frac{\partial V}{\partial y} = F_2, \frac{\partial V}{\partial z} = F_3\right)$$

continues (car  $\vec{F}$  est continu) en tout point de  $\mathcal{D}$ .

□