Université de LAUSANNE Faculté de Géosciences et Environnement

Examen Mathématiques II
Le 14 juin 2013 - Durée 2h

– Les notes de cours ne sont pas autorisées.
– L'usage d'un livre formulaire (ou la photocopie d'une partie d'un livre formulaire) est autorisé. L'usage d'un formulaire sous forme manuscrite est autorisé : il devra porter exclusivement sur le cours et ne pas comporter plus de 3 feuilles RV. D'autre part un formulaire est fournit à la fin du sujet.
– L'usage d'une calculette sans capacité de communication sans fil est autorisée (en particulier les tablettes et smartphones ne sont pas autorisés en remplacement d'une calculette).
– Le sujet comporte 3 exercices.
– Le sujet est LONG, mais il n'est pas forcement nécessaire de le faire (correctement) en entier pour obtenir la note maximale.

Exercice 1. Soit $f(x, y)$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^2-9y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) Montrer que f n'est PAS continue en $(0, 0)$. On pourra pour cela considérer une suite explicite (x_k, y_k) tendant vers $(0, 0)$ quand $k \to +\infty$.

(2) Montrer que f est différentiable en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$; puis calculer ses dérivées partielles.

(3) Après avoir montré que cela a un sens, donner l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(3, 2, 0)$.

Exercice 2. Soit $D \subset \mathbf{R}^2$ le domaine

$$D = \{(x, y),\ x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Soit f la fonction définie par

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 4x^3y.$$

(1) Donner la liste des points critiques de f dans D. Parmi ces points, lesquels sont des points "selle" et lesquels sont des extrema locaux.

(2) En cas d'extrema déterminer si c'est un maximum ou un minimum local. En cas de point selle déterminer les équations des droites caractéristiques.

Exercice 3. Soit

$$f(x, y, z) = \frac{1}{1 + 3x^2 + 3y^2 + 2z^2}.$$

On considère la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} u : t \in [0, \pi] \mapsto u(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ &= (\cos(t) + \sin(t), \cos(t) - \sin(t), 1) \end{aligned}$$

dont la courbe géométrique est notée $\mathcal{C}$.

(1) Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement contenue dans une surface de niveau définie par l'équation $f(x, y, z) = C$ avec C une constante que l'on précisera.

(2) Calculer, pour tout t le vecteur vitesse $u'(t)$ et calculer la longueur de la courbe $\mathcal{C}$.

(3) Calculer les coordonnées du champ de vecteur $\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$; montrer que pour tout t, $u'(t)$ est perpendiculaire à $\vec{F}(u(t))$.

(4) Calculer le travail de $\vec{F}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$.

(5) Soit $\vec{G}$ le champ de vecteurs $\vec{G}(x, y, z) = (y, x, z)$. Montrer que le champ $\vec{G}$ est conservatif ; calculer son travail le long de $\mathcal{C}$.